

高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编 陶平生 冯跃峰 边红平

HANSHU BUDENGSHI

函数不等式

李世杰 李 盛 主编

浙江大学出版社

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座．函数不等式/李世杰，李盛主编．—杭州：浙江大学出版社，2009．2
ISBN 978-7-308-06576-4

Ⅰ．高… Ⅱ．①李…②李… Ⅲ．代数课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634．603

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第018796号

高中数学竞赛专题讲座——函数不等式

李世杰　李　盛　主编

责任编辑　沈国明
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
(杭州天目山路148号　邮政编码310028)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn)
电话：0571—88925592，88273066(传真)
经　　销　浙江省新华书店
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　13.25
字　　数　270千字
版 印 次　2009年2月第1版　2009年2月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06576-4
定　　价　22.00元

丛书编委会

编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来，反响强烈，深受广大读者喜爱，并收到了大量反馈信息。很多读者，包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见，希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求，我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共9种：《图论方法》、《周期函数和周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》、《函数不等式》；考虑到配套，把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法，凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是：

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题，通过对典型例题的解剖，传授数学思想方法，侧重培养学生的逻辑思维能力，不唯解题而解题；

2. 本着少而精的原则选择材料，不搞题海战术，不追求大而全，而是以点带面，举一反三；

3. 以数学修养和能力培养为立意，通过深刻剖析问题的数学背景，挖掘数学内涵，培养学生的数学品格和解决实际问题的能力；

4. 在注重基础知识训练同时，有适当程度的提高，对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编；参加编写的成员是：陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限，书中的不妥之处敬请读者批评指正。



目 录





第1讲 函数不等式的解法

知识扫描

一、引言

在初等数学中见到的不等式，几乎都是含有未知数的不等关系式，如：

1. $x-1>0$.

2. $x^2-3x-4\leqslant 0$.

3. $2^x-3>0$.

4. $\log_2(x-2)-x-6\geqslant 0$.

5. 若奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(-3)=0$，解不等式 $xf(x)<0$.

6. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，解不等式 $f(x-1)>f(1-2x)$.

7. （2006年全国高中数学联合竞赛河南省预赛试题）设函数 $f(x)(x\in \mathbf{R}, x\neq 0)$ 对任意的非零实数 x_1, x_2，有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则不等式 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0$ 的解为________.

这些含有未知数的不等式，其解是一个或一系列特定的数值区间（或无解），我们把这类不等式称为“数值不等式”，习惯上把其中第5,6,7题这一类求未知函数自变量“数值解”的不等式称为函数不等式.

还有一类不等式，作为未知变量的是一个函数或一类函数，即这种不等式具有函数解，其解集的元素是函数，我们把这类不等式称为函数元不等式（在不会引起混淆时也简称为函数不等式）. 例如，在近年来的高考和大学、中学奥林匹克数学竞赛中出现的如下一些试题：

1. （2008年全国高中数学联合竞赛第1试试题）设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(0)=2008$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，满足 $f(x+2)-f(x)\leqslant 3\cdot 2^x$，$f(x+6)-f(x)\geqslant 63\cdot 2^x$，则 $f(2008)=$________.

2. 已知二次函数 $f(x)$ 满足条件①$f(-1)=0$；②对一切 x 之值有 $x\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{2}(1+$

x^2)成立,试求 $f(x)$ 的解析式.

3.(第31届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题,2005年)是否存在有界函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,使得 $f(1) > 0$,且对一切的 $x, y \in \mathbf{R}$,都有

$$f^2(x+y) \geqslant f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)$$

成立?

4.(第9届中国中学生数学冬令营试题,1994年)求适合以下条件的所有函数 $f: [1, +\infty) \to [1, +\infty)$.

(1) $f(x) \leqslant 2(x+1)$;(2) $f(x+1) = \frac{1}{x}[f^2(x) - 1]$.

5.(1977年第9届IMO试题)设 $f(n)$ 定义在正整数集上且函数值也在正整数集上,证明:若对 $\forall x \in \mathbf{N}^*$, $f(n+1) > f[f(n)]$,则 $f(n) = n$.

6.(第四届大学生国际数学奥林匹克试题)证明:不存在实数集到实数集的映射 f,使得对于所有的正实数 x, y,有

$$f(x+y) > f(x)[1 + yf(x)]$$

成立.

7.(第4届中国中学生数学冬令营试题,1989年)f 是定义在 $(1, +\infty)$ 上且在 $(1, +\infty)$ 中取值的函数,满足条件:对任意 $x, y > 1$ 及 $u, v > 0$,都成立

$$f(x^u y^v) \leqslant f^{\frac{1}{4u}}(x) f^{\frac{1}{4v}}(y) \qquad ①$$

试确定所有这样的函数 f.

这些函数不等式的解决仅以初等数学为工具,解法富于技巧,对人类的智慧具有明显的挑战意味.

实际上我们熟悉的单调函数的定义:

设区间 $D(\subseteq \mathbf{R})$,若对任意的 $x \in D$,对增量 $\Delta x > 0$ 有 $x + \Delta x \in D$,且 $f(x+\Delta x) > f(x)$(或 $f(x+\Delta x) < f(x)$),则称 $f(x)$ 在 D 上是单调递增函数(或单调递减函数).

我们在文献[1]中研究的如下的 l 凸函数:

设 $f(x)$ 是定义在实线性空间 X 中的凸集 M 上的实值连续函数,若对 $\forall x_1, x_2 \in D(\subseteq M)$, $\lambda \in [0,1]$ 和给定的常数 l,都有 $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + l \in M$,且

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 + l] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad ②$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的 l 凸函数;当 $-f(x)$ 为 D 上的 l 凸函数时,则称 $f(x)$ 为 D 上的 l 凹函数.

当 $l=0$ 时,②式就是通常的凸(凹)函数定义.

这些都是用函数不等式的形式来定义的,未知的是函数 $f(x)$.

一个函数不等式,是数值型的还是函数元型的,判断的依据是:它的解是数值还是函数.

令人振奋的是,最近,中国科学院林群院士建议(文献[60]),不采用基于极限概念的点态导数定义,而在区间上用一个函数不等式定义导数:

定义　设函数 F 在$[a,b]$上有定义. 如果有一个在$[a,b]$上有定义的函数 f 和正数 M,使得对$[a,b]$上任意的 x 和 $x+h$,有下列不等式

$$|(F(x+h)-F(x))-f(x)h|\leqslant Mh^2 \quad ①$$

成立,则称 F 在$[a,b]$上强可导,并且称 $f(x)$是 $F(x)$的导数,记作 $F'(x)=f(x)$.

显然,它可以写成以下的等价式:

$$F(x+h)-F(x)=f(x)h+M(x,h)h^2 \quad ②$$

其中,$M(x,h)$是一个在区域$\{(x,h):x\in[a,b],x+h\in[a,b]\}$上有界的函数.

容易看出,若 F 在$[a,b]$上强可导,则它在任一点 $x\in[a,b]$处可导;反过来则不成立. 而初等函数在任意不含奇异点的闭区间上都是强可导的.

微积分的严格化基于所谓 ε、δ 语言的极限概念的引进. 而这样表述的极限概念对于初学者很难理解,已经成为学习高等数学之路上的一道关卡. 如何使微积分入门教学变得容易,是国际数学教育领域的百年难题.

利用林群院士提出的导数定义,可以大大简化微积分基本定理的论证,为微积分的初等化开创了一条新路. 对此,林群院士、张景中院士的工作引人注目,有兴趣的读者可参考文献[15]、[21]、[43]、[60]等.

实际上定义中①式右端的 h^2 的指数 2 换成大于 1 的数也可以,这就拓展了函数不等式在高等数学中的应用范围.

关于函数不等式,在近年来的高考和各级各类数学竞赛试题,如国际数学奥林匹克竞赛试题(简称 IMO 试题)、IMO 预选试题、中国中学生数学奥林匹克竞赛试题(简称 CMO 试题)、高中数学联赛试题中都有出现,这方面的题型主要包括:求解关于自变量的函数不等式,求解函数不等式,证明函数不等式以及与函数不等式有关的综合问题. 在数学竞赛中出现的函数不等式,可以说是"小荷才露尖尖角",相信以后会有更多的函数不等式题型在各级各类数学竞赛中出现.

二、函数不等式的数值解

求函数不等式的数值解,往往要利用某些条件,先确定未知函数的表达式,或未知函数的性质,如单调性、奇偶性、周期性、凸凹性等,并用不等式进行一些估计. 求函数不等式的数值解的基本方法有:构造函数法、变更主元法、特值转换法、数形结合法、函数单调性法、代换法等. 常用的化归方式有:利用条件结合函数或不等式性质,将问题化为函数问题或数值不等式问题.

例题分析

例 1　已知 $y=f(x)$ 是单调递增的奇函数,它的定义域为$[-1,1]$,求函数 $g(x)=\sqrt{f(x^2-3)+f(x+1)}$ 的定义域与值域.

解 $g(x)$ 的定义域受 $f(x)$ 定义域的制约.它满足不等式:

$$\begin{cases} -1\leqslant x^2-3\leqslant 1 & ① \\ -1\leqslant x+1\leqslant 1 & ② \\ f(x^2-3)+f(x+1)\geqslant 0 & ③ \end{cases}$$

由①式得:$\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2$ 或 $-2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}$ ④

由②式得:$-2\leqslant x\leqslant 0$ ⑤

④、⑤两式的交集是 $-2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}$ ⑥

再考虑③式:$f(x^2-3)\geqslant -f(x+1)$,

因为 $f(x)$ 为奇函数,有 $f(x^2-3)\geqslant f(-x-1)$,

又 $f(x)$ 为增函数,故 $x^2-3\geqslant -x-1$,

所以 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -2$ ⑦

由⑥、⑦两式知 $g(x)$ 的定义域为 $\{-2\}$,从而求得 $g(x)$ 的值域为 $\{0\}$.

评析 本题看起来结构挺简单,其实包含了比较丰富的内容:定义域、值域、复合函数、奇偶性、单调性等等.

我们先根据 $g(x)$ 的定义域列出函数不等式组,再根据 $f(x)$ 是单调递增的奇函数,脱掉"f"转化为普通的数值不等式.

例2 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数,且在 $(0,1)$ 上为增函数,若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$,试确定实数 a 的取值范围.

分析 将函数不等式向普通的代数不等式转化,实质为函数奇偶性和单调性的应用.

由 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$,则 $f(a-2)<f(4-a^2)$,$f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数,且在 $(0,1)$ 上为增函数,则函数不等式可分两类,用单调性转化求解.也可利用偶函数的特征,两类并一类转化求解.

解 由 $f(a-2)<f(4-a^2)$,且 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数,在 $(0,1)$ 上为增函数,故有 $\begin{cases} |a-2|<|4-a^2| \\ |4-a^2|<1 \\ |a-2|>0 \end{cases}$ 解得 $\sqrt{3}<a<2$ 或 $2<a<\sqrt{5}$.

例3 已知 $f(\cos x)\geqslant 0$ 的解集为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,解不等式 $f(\sin x)\geqslant 0$.

解 令 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm t$,$k\in\mathbf{Z}$,则

$$f(\sin x)=f\left[\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\pm t\right)\right]=f(\cos t)\geqslant 0$$

由已知得 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$,

故 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\pi$.



或 $2k\pi < x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$。

从而知 $2k\pi < x < 2k\pi + \pi$ $(k \in \mathbf{Z})$。

评析 这里用变量代换法解函数不等式，即将已知函数不等式中自变量 x 用另一变量 t 的表达式代换，推演出新的函数不等式，从而创造解函数不等式的条件，再解出原函数不等式。

例4 奇函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$f(2)=0$，解不等式 $(x-1)f(x+1)>0$。

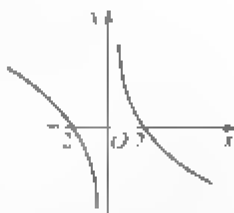


图1-[illegible] 例4解答图

分析 $f(x)$ 是一个未给出解析式的函数，涉及的性质并不单一，有必要借助图形来帮助思考。为此，先根据 $f(x)$ 的单调性和条件 [illegible]，作出函数在左半平面的示意图，再根据对称性，作出右半平面的图形。有了这个图 [illegible]，我们不难看到，当 [illegible] 时 [illegible]，此时 $f(x$ [illegible]$)$ [illegible]，原不等式无解；当 x [illegible] 1 时，由于函数在 x [illegible] 处断开，$f(x)$ 有 [illegible] 和 [illegible] 两种情况。注意到 [illegible] 时，原不等式无解，故原不等式等价于 [illegible]，再根据函数的单调性，解之得原不等式的解集为 $\{x \mid -3 < x < -1\}$。

评析 本例是用图象法解函数不等式的。由于数学题的表达方式是抽象的，抽象的东西在概括其本质的同时往往会消解其直观意义，遮蔽其真实面目。只有把它具体化、直观化，才能抓住它的来龙去脉，也才可以借助直观意义形成正确的猜想，确立解题的基本思路。

例5 已知二次函数 $f(x)$ 的图象开口向下，且对于任意实数 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(2-x)=f(2+x)$ 成立，求解不等式 $f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\right] > f\left[\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right)\right]$。

解 因为 $x^2+x+\frac{1}{2}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}$，

所以 $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) \leqslant 2$。

同理，$\log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right) \leqslant 1$。

由 $f(2-x)=f(2+x)$ 知抛物线的对称轴为 $x=2$，又 $y=f(x)$ 的图象开口向下知，当 $x<2$ 时函数 $f(x)$ 为增函数，原不等式化为 $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(2x^2-x+\frac{5}{8}\right)$，即 $x^2+x+\frac{1}{2} < 2x^2-x+\frac{5}{8}$，解得 $1-\frac{\sqrt{14}}{4} < x < 1+\frac{\sqrt{14}}{4}$。

评析 凡涉及函数的定义、函数的奇偶性、单调性、周期性等的函数不等式问题，其解题的思路为：紧扣有关概念，合理利用函数的单调性对应法则及题设条件，脱掉函数记号 $f(x)$，进行等价转化，使问题获解。这是等价转化思想在函数问题中的一个体现，常常利用这种等价

转化的方法解函数不等式

例6 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对任意的 $a,b\in\mathbf{R}$，当 $a+b\neq 0$ 时，都有 $\dfrac{f(a)+f(b)}{a+b}>0$

(1) 证明：$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数；

(2) 若关于 x 的不等式 $f(m\cdot 2^x)+f(2^x-4^x+m)<0$ 对一切实数 x 恒成立，求实数 m 的取值范围

解 证明 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，还得应用定义，关键在于奇函数这一性质怎么用？

(1) 任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，即

$$x_1+(-x_2)<0$$

由题意 $\dfrac{f(x_1)+f(-x_2)}{x_1-x_2}>0$，而 $f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(-x_2)=-f(x_2)$，有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

因为 $x_1<x_2$，因此必须 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

(2) 因为 $f(m\cdot 2^x)+f(2^x-4^x+m)<0$，

所以 $f(m\cdot 2^x)<f(-2^x+4^x-m)$.

因此有 $m\cdot 2^x<-2^x+4^x-m$，整理成 $4^x-(m+1)2^x-m>0$ 对一切 x 恒成立.

设 $t=2^x\in(0,+\infty)$，即 $g(t)=t^2-(m+1)t-m>0$ 对一切正数恒成立，有两种情况

①$\Delta<0$；②$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ g(0)\geqslant 0,\\ \dfrac{m+1}{2}<0\end{cases}$

于是可知实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-3+2\sqrt{2})$.

评析 本题主要考查函数不等式的解法及其应用，解不等式的应用非常广泛，如求函数的定义域、值域，求参数的取值范围等，高考试题中，对于解不等式要求较高，往往与函数概念，特别是二次函数、指数函数或对数函数等有关概念和性质密切相关

例7 定义在 $\mathbf{R}$ 上的单调函数 $f(x)$ 满足 $f(3)=\log_2 3$，且对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$

(1) 求证 $f(x)$ 为奇函数；

(2) 若 $f(k\cdot 3^x)+f(3^x-9^x-2)<0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 k 的取值范围

分析 欲证 $f(x)$ 为奇函数，即要证对任意 x 都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立. 在式子 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 中，令 $y=-x$ 可得 $f(0)=f(x)+f(-x)$. 于是又提出新的问题，求 $f(0)$ 的值，令 $x=y=0$ 可得 $f(0)=f(0)+f(0)$ 即 $f(0)=0$，$f(x)$ 是奇函数得到证明.

解 (1) 证明 $f(x+y)=f(x)+f(y)\quad(x,y\in\mathbf{R})$， ①

令 x $=$ ，代入① 式，得 $f(0)=0$.

令 y x，代入 ① 式，得 $f(x\ \ x)$ $f(x)+f(\ \ x)$，又 $f(0)$ 0，则有 $0=f(x)+f(\ \ x)$，即 $f(\ \ x)=\ \ f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) $f(3)$ $\log_2 3>0$，即 $f(3)>f(\ \ )$，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调函数，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，又由(1)知 $f(x)$ 是奇函数.

$f(k\cdot 3\ \ )<\ \ f(3\ \ \ 9\ \ \ 2)=f(\ \ 3\ \ \ \ )$，$k\cdot$ $\ \ 9\ \ +2$，

3 $(1+k)\cdot 3$ 2 0 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立.

令 $t=3$ >0，问题等价于 t $-(1+k)t+2$ 0 对任意 $t>0$ 恒成立.

令 $f(t)=t-(1+k)t-2$，其对称轴 t $\frac{1\ \ k}{\ }$

当 $\frac{\ \ k}{\ }<0$ 即 $k<-1$ 时，$f(0)=2>0$，符合题意.

当 $\frac{1\ \ k}{\ }$ 0 时，对任意 $t>0$，$f(t)>0$ 恒成立

$\Delta=(1+k)\ \ -4\times 2<0$

解得 $\ \ 1\leqslant k<-1+$

综上所述，当 k 时 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

评析 本题 运用函数思想，利用不等式的性质与函数单调性的特点，将求 k 的取值范围转化为求函数的最值问题，简洁明快.

问题 的上述解法是根据函数的性质 $f(x)$ 为奇函数且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，把问题转化成 次函数 $f(t)$ k 对于任意 t 恒成立. 对 次函数 $f(t)$ 进行研究求解. 本题还有更简洁的解法.

分离系数，由 $k\cdot 3$ <-3 $+9$ $+2$，得 k

即 u 的最小值为 1，要使对 $x\in\mathbf{R}$ 不等式 k 3 $\frac{2}{\ }$ 1 恒成立，只要使 k

上述解法是将 k 分离出来，然后用平均值不等式求解，过程简洁，方法新颖.

例 8 已知 $f(x)$ 是单调减函数，值域为 $1,1$ $f(\ \ )$ 1，且满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$.

(1) 求证 $\frac{1}{4}$ 不在定义域内；

(2) 解不等式 $f(\ \ x)+f(\ \ )$ $\frac{1}{\ }$

解 (1) 用反证法. 若 $\frac{1}{4}$ 在 $f(x)$ 的定义域内，则



[illegible]

这与 $f(x)$ 的值域 [illegible] 矛盾，所以 [illegible] 不在定义域内.

(2) 在 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中，令 $x=f^{-1}(u)$，$y=f^{-1}(v)$，得 $f[f^{-1}(u)\cdot f^{-1}(v)]=u+v$，即

$$f^{-1}(u)\cdot f^{-1}(v) = f^{-1}(u+v)$$

又 $f^{-1}(1)=\frac{1}{2}$，故所给不等式化为

[illegible]

又 $f(x)$ 是单调减函数，所以 [illegible] 在 [illegible] 上也为减函数，所给不等式等价于

[illegible]，解得 [illegible]

故所给不等式解集为 [illegible].

例 9 设 [illegible] 有意义，[illegible] 的充要条件是 [illegible] 求 [illegible] 和 [illegible] 的值，(2) 当 [illegible] 在什么范围取值时 [illegible] $f(x-3)$ [illegible]

解 (1) 由于 $f(2)=1$，且对于 $x>0$，$y>0$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，则令 $x=1$，y [illegible] 得 $f(2)=f(1)+f(2)$，即 $f(1)$ [illegible]

令 $x=2$，$y=2$，得 $f(4)=f(2)+f(2)=2$

(2) 由条件 $f(xy)=f(x)+f(y)$，得

$$f(x)+f(x-3)=f(x^2-3x).$$

又 $f(4)=2$，则由 $f(x)+f(x-3)\leqslant 2$，得

$$f(x^2-3x)\leqslant f(4).$$

由条件 [illegible] 成立的充要条件是 [illegible]，所以有 [illegible] x^2-3x [illegible] 4，[illegible] $x>0$，[illegible] $x-3>0$ [illegible] 解得 $3<x\leqslant 4$ [illegible]

评析 题目条件中有函数方程，求解时常对函数方程中的变量取一些特殊值或特殊式以利于解题.

例 10 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数，且 $f(x)\neq$ [illegible]，$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ [illegible]

(1) 求证 $f(x)>0$.

(2) 求证 $f(x-y)=$ [illegible]



(3) 若 $f(1)=2$,解不等式 $f(3x)>4f(x)$.

解 (1) $f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)>0$(因为 $f(x)\neq 0$).

(2) $f(x-y)f(y)=f[(x-y)+y]=f(x)$,变形即得 $f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$

(3) 因为 $f(1)=2$,所以 $f(2)=f(1+1)=f^2(1)=4$

故 $f(3x)>4f(x)$,即 $\frac{f(3x)}{f(x)}>4$ 可化为

$$f(3x-x)>f(2)\Leftrightarrow 3x-x>2$$

解得 $x>1$.

例 11 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足,对任意实数 m,n,总有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$,且当 $x>0$ 时,$0<f(x)<1$.

(1) 判断 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $A=\{(x,y)\mid f(x^2)\cdot f(y^2)>f(1)\}$,$B=\{(x,y)\mid f(ax-y+\sqrt{2})=1,a\in\mathbf{R}\}$,若 $A\cap B=\varnothing$,试确定 a 的取值范围.

解 (1) 在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 中,令 $m=1,n=0$,得 $f(1)=f(1)\cdot f(0)$,因为 $f(1)\neq 0$,所以 $f(0)=1$.

在 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$ 中,令 $m=x,n=-x$

因为当 $x>0$ 时,$0<f(x)<1$,所以当 $x<0$ 时 $-x>0$,$0<f(-x)<1$

而 $f(x)\cdot f(-x)=f(0)=1$,所以 $f(x)=\frac{1}{f(-x)}>1>0$

又当 $x=0$ 时,$f(0)=1>0$,所以,综上可知,对于任意 $x\in\mathbf{R}$,均有 $f(x)>0$

设 $-\infty<x_1<x_2<+\infty$,则 $x_2-x_1>0$,$0<f(x_2-x_1)<1$

所以 $f(x_2)=f[x_1+(x_2-x_1)]=f(x_1)\cdot f(x_2-x_1)<f(x_1)$

所以 $y=f(x)$ 在 R 上为减函数

(2) 由于函数 $y=f(x)$ 在 R 上为减函数,所以 $f(x^2)\cdot f(y^2)=f(x^2+y^2)>f(1)$

即有 $x^2+y^2<1$.

又 $f(ax-y+\sqrt{2})=1=f(0)$,根据函数的单调性,有 $ax-y+\sqrt{2}=0$

由 $A\cap B=\varnothing$,所以直线 $ax-y+\sqrt{2}=0$ 与圆面 $x^2+y^2<1$ 无公共点,因此有 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+1}}\geqslant 1$,解得 $-1\leqslant a\leqslant 1$

评析 (1) 要讨论函数的单调性必然涉及两个问题:一是 $f(0)$ 的取值问题,二是 $f(x)>0$ 的结论.这是解题的关键性步骤,完成这些要在所给函数式中进行.由特殊到一般的解题思想,联想类比思维都有助于问题的思考和解决.

例 12 设 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 的奇函数,且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(1) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的单调性,并用单调函数的定义加以证明;



(2) 若 $f(1)=0$，解关于 x 的不等式 $f[\log_a(1-x^2)+1]>0$，其中 $a>1$；

(3) 若 $m>0,n>0$ 时，$f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$，且 $f(-2)=-1$，求 $\log_{\frac{1}{2}}|f(t)+1|>0$ 时 t 的取值范围

解 (1) 设 $x_1<x_2<0$，则 $-x_1>-x_2>0$，

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$

又因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $-f(x_1)>-f(x_2)$

故 $f(x_1)<f(x_2)$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数

(2) 因为 $f(1)=0$，

所以 $f(-1)=-f(1)=0$，原不等式等价于

$$\begin{cases}\log_a(1-x^2)+1>0,\\ \log_a(1-x^2)+1>1,\end{cases} \qquad ①$$

或

$$\begin{cases}\log_a(1-x^2)+1<0,\\ \log_a(1-x^2)+1>-1\end{cases} \qquad ②$$

① 式即 $\log_a(1-x^2)>0$，

因为 $a>1$，所以 $1-x^2>1$ 即 $x^2<0$，解集为 $\varnothing$

② 式即 $-1<\log_a(1-x^2)+1<0$，即 $-2<\log_a(1-x^2)<-1$，

因为 $a>1$，

所以 $\frac{1}{a^2}<1-x^2<\frac{1}{a}$，

解得 $-\sqrt{1-\frac{1}{a}}<x<-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}$

或 $\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<x<\sqrt{1-\frac{1}{a}}$，

所以原不等式的解集为

$$\left\{x\left|-\sqrt{1-\frac{1}{a}}<x<-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\ \text{或}\ \sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<x<\sqrt{1-\frac{1}{a}}\right.\right\}$$

(3) 因为 $\log_{\frac{1}{2}}|f(t)+1|>0$，

所以 $0<|f(t)+1|<1$

所以 $-2<f(t)<-1$ 或 $-1<f(t)<0$，

根据函数 $f(x)$ 的单调性，下面只需求出 $-2,-1,0$ 所对应的 t 值，即可求出 t 的取值范围

因为 $f(1)=f(1)+f(1)$，

所以 $f(1)=0$ 且 $f(-1)=-f(1)=0$

又因为 $f(-2)=-1$，

所以 $f(2)=1$，$f(4)=f(2)+f(2)=2$，$f(-4)=-f(4)=-2$



又因为 $f(2)=f(4)+f\left(\frac{1}{2}\right)$.

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，$f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

所以 t 的取值范围是

$$(-4,-2)\cup(-2,-1)\cup\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right).$$

例 13 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数且满足 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，$f(3)=1$，试解函数不等式

$$f(x)-f\left(\frac{1}{x-5}\right)\geqslant 2.$$

解 因为 $f(x)-f\left(\frac{1}{x-5}\right)\geqslant 2$，所以 $f\left[\frac{x}{(x-5)^{-1}}\right]\geqslant 2f(3)$

即 $f\left[\frac{x(x-5)}{3}\right]\geqslant f(3)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 为增函数，故有

$$\begin{cases}x>0\\ x-5>0\\ \frac{x(x-5)}{3}\geqslant 3\end{cases}$$

解之得 $x\geqslant\frac{5+\sqrt{61}}{2}$

评析 若将本例中的函数不等式 $f(x)-f\left(\frac{1}{x-5}\right)\geqslant 2$ 推广为 $f(x)-f\left(\frac{p}{x-5}\right)\geqslant 2$，则此不等式的解为：

当 $p>0$ 时，$x>\frac{1}{2}(5+\sqrt{25+36p})$；

当 $-\frac{25}{36}<p<0$ 时，解为

$$\frac{1}{2}(5-\sqrt{25+36p})<x<\frac{1}{2}(5+\sqrt{25+36p}).$$

例 14 若非零函数 $f(x)$ 满足 (1) 对任意实数 a,b 均有 $f(a-b)=\frac{f(a)}{f(b)}$；

(2) 当 $x<0$ 时 $f(x)>1$；

(3) $f(4)=\frac{1}{16}$

试解不等式：$f(x-3)\cdot f(5-x^2)\leqslant\frac{1}{4}$



解 由 $f(a-b)=\dfrac{f(a)}{f(b)}$，令 $a=b$ 得 $f(0)=1$，

则
$$f(-b)=f(0-b)=\frac{1}{f(b)},$$

$$f(a+b)=f[a-(-b)]=\frac{f(a)}{f(-b)}=f(a)\cdot f(b)$$

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0.$$

从而
$$f(4)=f^2(2)=\frac{1}{16},f(2)=\pm\frac{1}{4}.$$

又因为
$$1=f(2-2)=f(2)f(-2),$$

且
$$f(-2)>1,$$

则 $0<f(2)<1$，即 $f(2)=\dfrac{1}{4}$.

因此，不等式等价于
$$f[(x-3)+(5-x^2)]\leqslant f(2).$$

设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1-x_2)>1$，

即
$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}>1.$$

又可知
$$f(x_2)>0，则 f(x_1)>f(x_2)，$$

即 $f(x)$ 为减函数

那么不等式又等价于
$$x-3+5-x^2\geqslant 2.$$

解得 $0\leqslant x\leqslant 1$.

故原不等式的解集为 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

评析 函数的单调性是转化函数不等式的常用思路 本题首先应该想到最终转化为形式 $f(\cdots)\leqslant f(\cdots)$，然后，再寻找左、右两边的转化策略

例 15 定义在 R 上的函数 $y=f(x)$，满足 $f(0)\neq 0$，当 $x>0$ 时，$f(x)>1$，且对任意的 $a,b\in\mathbf{R}$，有 $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$

(1) 证明：$f(0)=1$；

(2) 证明：对任意的 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $f(x)>0$；

(3) 证明 $f(x)$ 是 R 上的增函数；

(4) 若 $f(x)\cdot f(2x-x^2)>1$，求 x 的取值范围.

分析 本题是道抽象函数题，通过对已知条件的分析，容易知道函数 $y=f(x)$ 的特殊模型是指数函数 $y=a^x$ 在 $a>1$ 时的情形，利用图象不难解决问题 过程如下：

(1) 令 $a=b=0$，则 $f(0)=f^2(0)$，又 $f(0)\neq 0$，故 $f(0)=1$

(2) 由题设知 $x>0$ 时，$f(x)>1>0$



当 $x<0$ 时，$-x>0$，

由 $f(0)=f(x)\cdot f(-x)=1$，得 $f(x)=\dfrac{1}{f(-x)}$。

由 $-x>0$ 即有 $f(-x)>0$，故 $\dfrac{1}{f(-x)}>0$，即 $x<0$，也有 $f(x)>0$。

综上，对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒有 $f(x)>0$。

(3) 设 $x_1<x_2$，不妨令 $x_2=x_1+t(t>0)$，则 $f(x_2)=f(x_1+t)=f(x_1)\cdot f(t)$，由于 $f(x_1)>0$，$f(t)>1$，故 $f(x_2)=f(x_1)\cdot f(t)>f(x_1)$，即 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数。

(4) 由 $f(x)\cdot f(2x-x^2)>1$，$f(0)=1$，得 $f(3x-x^2)>f(0)$，又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，故 $3x-x^2>0$，解得 $0<x<3$。

评析 在抽象中展开猜想的翅膀，由 $f(a+b)=f(a)f(b)$ 猜想函数 $f(x)$ 的生成原型函数：$f(x)=a^x$，又由 $x>0$ 时，$f(x)>1$ 知 $a>1$，至此，问题(1)(2)的答案即可大胆猜想如下：(1) $f(0)=1$，$f(x)>0$；(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数。但这只是对问题的猜想，解决问题还需要严格的论证，带着结论去探求解答，思考线索明朗了，操作也就有的放矢了。

这样的解题方式称为模型化策略，就是根据题目给定的关系大胆猜想函数的生成原始模型，作出目标猜想，利用模型函数的有关性质去探索解题方法。例如，满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 的 $f(x)$ 的模型函数可猜想为正比例函数，满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 的 $f(x)$ 的模型函数为指数函数，满足 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 的 $f(x)$ 的模型函数为对数函数等等。如果是选择题或填空题，可用模型函数解决；如果是解答题，模型函数可以启迪思路并起验证作用。

例 16 定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足：对于任意实数 x、y 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 成立，且当 $x>0$ 时，$f(x)<0$ 恒成立。解关于 x 的不等式

$$\frac{1}{n}\cdot f(ax^2)-f(x)>\frac{1}{n}\cdot f(a^2x)-f(a)\quad(n\text{ 是一给定的正整数},a<0).$$

解 易证得 $f(x)$ 是奇函数，则有

$$f(-x)=-f(x).$$

由
$$\frac{1}{n}\cdot f(ax^2)-f(x)>\frac{1}{n}\cdot f(a^2x)-f(a),$$

得
$$f(ax^2)-f(a^2x)>n[f(x)-f(a)],$$

所以
$$f(ax^2)+f(-a^2x)>n[f(x)+f(-a)],$$
$$f(ax^2-a^2x)>n\cdot f(x-a).$$

由已知条件可得

$$f[n(x-a)]=n\cdot f(x-a).$$

所以
$$f(ax^2-a^2x)>f[n(x-a)].$$

设任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1<x_2$，则

$$x_2-x_1>0,$$

由已知得
$$f(x_2-x_1)<0\qquad ①$$



又 $$f(x_2-x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2)-f(x_1).$$ ②

由①、②式得 $f(x_1)>f(x_2)$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

所以 $$ax^2-a^2x<n(x-a),$$

即 $$(x-a)(ax-n)<0.$$

因为 $$a<0,$$

所以 $$(x-a)\left(x-\frac{n}{a}\right)>0.$$

当 $a<\frac{n}{a}<0$,即 $a<-\sqrt{n}$ 时,原不等式解集为

$$\left\{x \mid x>\frac{n}{a} \text{ 或 } x<a\right\}.$$

当 $a=\frac{n}{a}<0$,即 $a=-\sqrt{n}$ 时,原不等式解集为

$$\{x \mid x\in \mathbf{R} \text{ 且 } x\neq-\sqrt{n}\}.$$

当 $\frac{n}{a}<a<0$,即 $-\sqrt{n}<a<0$ 时,原不等式解集为

$$\left\{x \mid x>a \text{ 或 } x<\frac{n}{a}\right\}.$$

评析 本题利用函数的单调性解二次不等式.对于参数 a、n 的讨论是本题的一个难点.

能力训练1

1.(2008年全国高考卷Ⅰ理科第9题)设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,且 $f(1)=0$,则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为 ( )

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

2.如图1-2所示,函数 $y=f(x)$ 的图象是中心在原点,焦点在 x 轴上的椭圆的两段弧,则不等式 $f(x)<f(-x)+x$ 的解集为( )

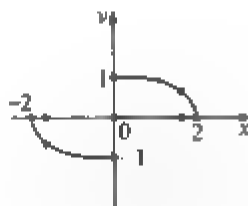


图1-2

A. $\{x \mid -\sqrt{2}<x<0$,或$\sqrt{2}<x\leqslant 2\}$

B. $\{x \mid -2\leqslant x<-\sqrt{2}$,或$\sqrt{2}<x\leqslant 2\}$

C. $\left\{x \mid -2\leqslant x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\text{,或}\frac{\sqrt{2}}{2}<x\leqslant 2\right\}$

D. $\{x \mid -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,且$x\neq 0\}$



3. 已知函数 $f(x)$ 为R上的减函数，点 $A(-1,3)$ 和点 $B(1,1)$ 在它的图象上，$f^{-1}(x)$ 是它的反函数，则不等式 $2008^{f^{-1}(\log_2 x)}<2008$ 的解集为 ( )

A. $(-1,1)$　　B. $(1,3)$　　C. $(2,8)$　　D. $(0,\log_2 3)$

4. (2002 年北京市理科高考题) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数，当 $0<x<3$ 时 $f(x)$ 的图象如图 1-3 所示，那么不等式 $f(x)\cos x<0$ 的解集是 ( )

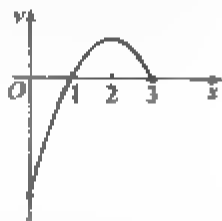


图 1-3

A. $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

B. $\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)\cup(0,1)\cup\left(\frac{\pi}{2},3\right)$

C. $(-3,-1)\cup(0,1)\cup(1,3)$

D. $\left(-3,-\frac{\pi}{2}\right)\cup(0,1)\cup(1,3)$

5. (第 16 届"希望杯"高一年级第 2 试试题) 偶函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足：$f(-4)=f(1)=0$，在区间 $[0,3]$ 与 $[3,+\infty)$ 上分别递减和递增，则不等式 $x\cdot f(x)<0$ 的解集为 ( )

A. $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$　　B. $(-4,-1)\cup(1,4)$

C. $(-\infty,-4)\cup(-1,0)$　　D. $(-\infty,-4)\cup(-1,0)\cup(1,4)$

6. (第 13 届"希望杯"高一年级第 2 试试题) 已知函数 $f(x)$ 是R上的增函数，它的图像经过点 $A(-1,-2)$，$B(3,2)$，则不等式 $|f(x+1)|\geq 2$ 的解集为 ( )

A. $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $[3,+\infty)$

7. 已知 $f(x)$，$g(x)$ 为奇函数，$f(x)>0$ 的解集为 (a^2,b)，$g(x)>0$ 的解集为 $\left(\frac{a^2}{2},\frac{b}{2}\right)$ (其中 a，b 为常数，且 $b>2a^2$) 则 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集为 ( )

A. $\left(\frac{a}{2},b\right)$　　B. $\left(-\frac{b}{2},-a^2\right)\cup\left(a^2,\frac{b}{2}\right)$

C. $\left(\frac{a^2}{2},b\right)$　　D. $\left(\frac{b}{2},b\right)$

8. (第 17 届"希望杯"高一年级培训题) 若函数 $f(x)$ 是定义在R上的奇函数，且是增函数，对任意 $\theta\in\mathbf{R}$，使不等式 $f(\cos2\theta-5)+f(2m+4\sin\theta)>0$ 恒成立，则 m 的取值范围是 ( )

A. $m>5$　　B. $m>2$　　C. $2<m<5$　　D. $m>4$

9. (2004 年湖南省高考理科第 12 题) 设 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义在R上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$，则不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$ 的解集是 ( )

A. $(-3,0)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-3,0)\cup(0,3)$

C. $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(0,3)$

10. (第 19 届"希望杯"高一年级第 2 试试题) 已知 k 是正数，函数 $f(x)$ 是R上的奇函数，若不等



式 $f(x)>kx$ 的解集是$\{x\mid x<-4$ 或 $0<x<4\}$，则不等式 $f(|x|)\leqslant k|x|$ 的解集是（　　）.

A. $\{x\mid x\geqslant 4\}$　　　　B. $\{x\mid |x|\leqslant 4\}$

C. $\{x\mid |x|\geqslant 4$ 或 $x=0\}$　　　　D. $\{x\mid x\geqslant 4$ 或 $x\leqslant 0\}$

11.（第18届"希望杯"高一年级第2试试题）已知定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上是增函数，若 $f(1)<f(x^2+x+1)$，则 x 的取值范围是________.

12.（2007全国高中数学联合竞赛江苏赛区初赛题）已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图1-4所示，则满足 $f\left(\frac{2x^2-x-1}{x^2-2x+1}\right)\cdot f(\lg(x^2-6x-20))\leqslant 0$ 的 x 的取值范围为________.

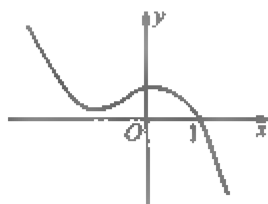


图1-4

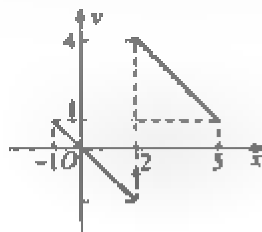


图1-5

13.（2006年全国高中数学联合竞赛河南省预赛试题）设函数 $f(x)(x\in\mathbf{R},x\neq 0)$ 对任意的非零实数 x_1,x_2，有 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，则不等式 $f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 0$ 的解为________.

14. 函数 $f(x)$ 的图象是两条直线的一部分（如图1-5所示），其定义域为 $[-1,2)\cup(2,5]$，求不等式 $f(x)-f(4-x)>-2$ 的解集为________.

15. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,1]$ 上的减函数，且对一切实数 x，不等式 $f(k-\sin x)\geqslant f(k^2-\sin^2x)$ 恒成立，则 k 的值为________.

16. 设正值偶函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=2$，且当 $xy\neq 0$ 时，$f(\sqrt{x^2+y^2})\leqslant\frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$，则 $f(5)$ ________ $\frac{8}{25}$（填上 $>$、$<$、$\geqslant$、$=$、$\leqslant$ 之一）.

17. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有单调性，且有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 及 $f(1)=1$. 若对任意正数 t 有 $f(k\log_2t)+f(\log_2t-\log_2^2t-2)>0$ 恒成立，求 k 的取值范围.

18. 定义在 $[-2,2]$ 上的偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递减，若 $f(1-m)<f(m)$，求 m 的取值范围.

19. 已知函数 $f(x)$ 对于任意 $s,t\in\mathbf{R}$ 都有 $f(s+t)-f(t)=(s+2t+1)s$，且 $f(1)=0$. 又当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，不等式 $f(x)<\log_ax-2$ 恒成立. 试求实数 a 的取值范围.

20. 函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，且 $f(x)$ 不恒为零. 当 $x>1$ 时，$f(x)>0$. 解



不等式：$f(x)+f\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$.

21. 设函数 $y=f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上，对于任意实数 m、n，恒有 $f(m+n)=f(m)\cdot f(n)$，且当 $x>0$ 时 $0<f(x)<1$.

(1) 求证：$f(0)=1$，且当 $x<0$ 时 $f(x)>1$；

(2) 求满足 $f(2x^2-4x-1)\cdot f(x-1)<1$ 的 x 的取值范围.

22. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足条件：① 对定义域上任意的 x、y 都有：$f(x)+f(y)=f(xy)$；② 当 $x>1$ 时，$f(x)>0$. 试求

(1) 求证 $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$；

(2) 证明：$f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上为增函数；

(3) 若 $f(3)=1$，且 a 为正实数时，解关于 x 的不等式 $f(x)-f\left(\frac{1}{2a-x}\right)\geqslant 2$

23. 定义在 $\mathbf{R}$ 上函数 $f(x)$ 对任意实数 x、$y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$，且当 $x<0$ 时，$f(x)>1$

(1) 证明当 $x>0$ 时，$0<f(x)<1$；

(2) 判断函数 $f(x)$ 的单调性；

(3) 如果对任意实数 x、y 有 $f(x^2)\cdot f(y^2)\leqslant f(axy)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

24. （第15届"希望杯"高一年级数学邀请赛试题）最小正周期 $T=2$ 的周期函数 $f(x)$ 对任意实数 x 都满足等式 $f(2-x)=f(2+x)$，且 $[a,b]$ 为 $f(x)$ 的一个单调区间.

(1) 证明：$b-a\leqslant 1$；

(2) 已知 $[0,1]$ 为函数 $f(x)$ 的一个单调区间，且对任意 $x<0$，都有 $f(2^x)>f(2)$，求不等式 $f(-10.5)>f(x^2+6x)$ 的解集

25. 定义域为实数集 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 同时满足以下3个条件：

① $x>0$ 时 $f(x)>0$；② $f(1)=2$；③ 对任意 m，$n\in\mathbf{R}$，都有 $f(m+n)=f(m)+f(n)$，设集合

$A=\{(x,y)\mid f(3x^2)+f(4y^2)\leqslant 24\}$，

$B=\{(x,y)\mid f(x)-f(ay)+f(3)=0\}$，

$C=\{(x,y)\mid f(x)=\frac{1}{2}f(y^2)+f(a)\}$，

若 $A\cap B\neq\varnothing$ 且 $A\cap C\neq\varnothing$，试求实数 a 的取值范围





第[illegible]讲　函数元不等式的定义

知识扫描

1. 定义

函数元不等式是一种特殊的函数不等式，类似于函数方程，下面给出"函数元不等式"的定义.

定义　含有自变量和未知函数，且两端的表示式是由有限个（已知的和未知的）函数与变数的有限次迭加所构成的不等式，称为函数元不等式，有时也简称为函数不等式或不等式.

下列不等式是函数元不等式的典型例子：

Cauchy 型函数元不等式：$f(xy)\geqslant f(x)+f(y)$；　　①

Gamma 型函数元不等式：$f(x+1)\geqslant xf(x)$；

Schröder 型函数元不等式：$\varphi[f(x)]\geqslant s\varphi(x)$；

Abel 型函数元不等式：$\varphi[f(x)]\geqslant\varphi(x)+c(c\neq0)$；

Babbage 型函数元不等式：$\varphi^n(x)\geqslant x$.

其中 $\varphi^n(x)$ 表示 $\varphi(x)$ 的 n 次迭代. 在本书中，我们总以 $\varphi(x)$、$g(x)$ 表示未知函数.

这些函数元不等式以等号形式成立时，就变成相应著名的同名函数方程.

由此可见，函数元不等式是函数方程的一种推广形式（函数方程可看做函数元不等式以等号成立时的特殊情形）. 因此，如果求出了函数元不等式的通解，取其等号成立的特殊情形，从理论上来说，我们也就得到了其相应函数方程的解.

2. 函数元不等式的解

既然函数元不等式含有未知函数，那么函数元不等式的解就是某个函数或某类函数.

定义　如果函数 $f(x)$ 在其定义域内满足所给的函数元不等式，就称 $f(x)$ 为该函数元不等式的解函数或解.

在某些条件下，从一个函数元不等式就能够确定出未知函数，这就是解函数元不等式的问题. 所谓解函数元不等式，就是在某种假定下寻找函数元不等式的解或确定不等式无解的



过程

因此，函数元不等式的求解事实上也是一个探求函数解析式的过程

容易验证，函数元不等式①的解是 $f(x)=a^{x}, a>1$；当 $t>0$ 时，本书第2页中函数元不等式②的解的全体是所有的凸(凹)函数

函数元不等式的解有两个重要特性：

其一是在怎样的集合上讨论函数元不等式，它的解就完全依赖于那个集合

例如，上述的Cauchy型函数元不等式①，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有连续解 $\varphi(x)=cx, c\leqslant 0$，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上还有解 $\varphi(x)=a\ln|x|+c, c\geqslant 0, c\leqslant 0$.

其二是在怎样的函数类中讨论解的个数或解的性态，就强烈地依赖于那种函数类

例如：$\varphi(x)=a\ln|x|+c, c\leqslant 0$ 是Cauchy型函数元不等式①在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不连续的解，但该函数元不等式在同样的集合上还有不连续的解 $\varphi(x)=a[\ln|x|]+c, a\geqslant 0, c\leqslant 0$（这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数）.

如果一个函数只是某函数元不等式的一个特定的解函数，我们通常称其为特解（不包含任意函数，但可能含有任意常数）。如果一个函数包括了某函数元不等式在一定条件下的全部解，则称其为函数元不等式的通解（一般包括任意函数）

以函数元不等式 $f(x+1)>f(x)$ 为例，$f(x)=x+c$（c 是常数）是它的一个特解（即不包含任意函数）；$f(x)=2x+g(\sin 2\pi x)$ 是它的一个通解（包含任意函数 $g(\mu)$）

如果一个函数包括了某个函数元不等式在一定条件下的全部解，此函数就称为该函数元不等式在所述条件下的全解

例如 $f(x)=ax$ 是函数元不等式 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ 在 $\mathbf{R}$ 上当 $f(0)=0$ 时的一个可微解

确定函数元不等式解的形式，尚无一般方法，需因题而异. 其解也是多样的：有无限多解的，有限个解的，也可能无解（如：不等式 $f^2(x)+f^2(-x)+1\leqslant 0$ 无解）

同"数值不等式"类似，几个函数元不等式也可以组成"函数元不等式组"，如

$$\begin{cases} f(n+1)\geqslant f(n) \\ f(n)\geqslant \dfrac{n}{n+1}f(2n) \end{cases}, n\in\mathbf{N}$$

而把由函数元不等式和等式组成的方程组叫做函数元不等式混合组，如

$$\begin{cases} f(x)\leqslant 2(x+1) \\ f(x+1)=\dfrac{1}{x}[f^2(x)-1] \end{cases}$$

再来看几个例子.

例1 已知 $f(\sqrt{x}+1)\geqslant x+2\sqrt{x}$，试求 $f(x)$

解 因为 $f(\sqrt{x}+1)\geqslant(\sqrt{x}+1)^2-1$，故 $f(x)\geqslant x^2-1\quad(x\geqslant 1)$

注 实际上我们只求出了函数元不等式有约束部分的解，对于 $x<1$，已知的函数元不等



式对 $f(x)$ 没有进行约束，因此可以任意取值，也可以不定义.

如下面的函数都是题给函数元不等式的解：

(1) $f(x) \geqslant x^2-1$；

(2) $f(x) \geqslant x^2-1, x \in [0,+\infty)$；

(3) $f(x) \geqslant x^2-1, x \in \{0\} \cup [1,+\infty)$；

(4) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x \geqslant 1 \\ x, x<1 \end{cases}$；

(5) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x \geqslant 1 \\ \sin x, x<1 \end{cases}$；

(6) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x \geqslant 1 \\ 2^x, -10<x<-1 \end{cases}$.

例 2 函数元不等式 $2f(x)+x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{3x^3-x^2+4x+3}{x+1}$ 的解是________.

解 题给函数元不等式对 $x=0,-1$ 没有约束，因此 $f(x)$ 在这两点可以任意取值. 完整的解法如下：当 $x \neq 0,-1$ 时，令

$$2f(x)+x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^3-x^2+4x+3}{x+1}+g(x), \forall g(x) \geqslant 0. \qquad ①$$

令 $x=\frac{1}{y}$，得 $f(y)+2y^2 f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{3y^3+4y^2-y+3}{y+1}+g\left(\frac{1}{y}\right)$，把 y 改为 x 得

$$f(x)+2x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^3+4x^2-x+3}{x+1}+x^2 g\left(\frac{1}{x}\right) \qquad ②$$

$2\times$①$-$②式，消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得

$$f(x)=x^2-3x+6-\frac{5}{x+1}+\frac{2}{3}g(x)-\frac{x^2}{3}g\left(\frac{1}{x}\right), \forall g(x) \geqslant 0, x \neq 0,-1 \qquad ③$$

当 $x=0,-1$ 时，题给函数元不等式对 $f(x)$ 没有约束，因此 $f(x)$ 在这两点可以任意取值或无定义.

检验 将③式代入 $2f(x)+x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{3x^3-x^2+4x+3}{x+1}=g(x) \geqslant 0$，可见由③式给出的函数 $f(x)$ 都是所给函数元不等式的解.

说明 取 $g(x)=0$，我们可得题给函数元不等式相应的函数方程 $2f(x)+x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3x^3-x^2+4x+3}{x+1}$ 的解为(下面 b,c 表示任意常数)

(1) $f(x)=x^2-3x+6-\frac{5}{x+1}(x \neq 0,-1)$；

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+6-\frac{5}{x+1}, x \neq 0,-1 \\ c, x=-1 \end{cases}$；



(3) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+6-\dfrac{5}{x+1}, & x\neq 0,-1\\ b, & x=0\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}b, & x=0\\ x^2-3x+6-\dfrac{5}{x+1}, & x\neq 0,-1\\ c, & x=-1\end{cases}$

显然它们也是题给函数元不等式的特解.

例 3 若 $h(x)$ 是偶函数, $g(x)$ 是奇函数, 且满足 $h(x)+g(x)\leqslant\dfrac{1}{x-1}$, 则它的解是 $h(x)=$ ______, $g(x)=$ ______

解 由于奇(偶)函数的定义域对称于原点, 所以函数元不等式 $h(x)+g(x)\leqslant\dfrac{1}{x-1}$ 在 $x=\pm 1$ 处没有约束, 故 $h(x)$, $g(x)$ 在 $x=1,-1$ 时可以任意取值或无定义. 令

$$h(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}+q(x), \tag{①}$$

其中 $\forall q(x)\leqslant 0, x\neq -1, 1$ ① 式中用 $-x$ 代 x, 得

$$h(x)-g(x)=-\frac{1}{x+1}+q(-x), \tag{②}$$

①、② 两式相加减, 得

$$h(x)=\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{2}[q(x)+q(-x)], \quad g(x)=\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{2}[q(x)-q(-x)]$$

其中 $\forall q(x)\leqslant 0, x\neq -1, 1$; 在 $x=1,-1$ 时 $h(x)$, $g(x)$ 可以任意取值或无定义.

说明 需要注意的是, $h(x)$, $g(x)$ 的定义域可以不相同, 如:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm 1\\ c, & x=1\end{cases}, \quad g(x)=\frac{x}{x^2-1} \text{ 和 } h(x)=\frac{1}{x^2-1}, \quad g(x)=\begin{cases}b, & x=-1\\ \dfrac{x}{x^2-1}, & x\neq\pm 1\\ c, & x=1\end{cases},$$

都是函数元不等式 $h(x)+g(x)\leqslant\dfrac{1}{x-1}$ 的特解.

可见, 函数元不等式的解, 既可以用不等式形式给出, 也可以用等式形式以函数表达式的方式给出

例 4 函数元不等式 $W[f(x)]\neq f(x)$ 的解是否为 $W(x)\neq x$? 不少人会认为它是对的, 而对命题 "$W(x)\neq x\Rightarrow W[f(x)]\neq f(x)$" 更是确信无疑, 并用它来求解数学问题, 实际上这一命题的成立还需附加条件

当"$y=f(x)$ 的值域 D 包含于方程 $W(x)=x$ 的解集中"时, 如:

反例 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in Z\\ -1, & x\notin Z\end{cases}$, $W(x)=\dfrac{1}{x}$,



尽管 $W(x)\neq x$，但 $W[f(x)]=\frac{1}{f(x)}=f(x)$。

正确结论　当 $y=f(x)$ 的值域包含于方程 $W(x)=x$ 的解集中时，尽管有 $W(x)\neq x$，仍有 $W[f(x)]=f(x)$；当 $y=f(x)$ 的值域不包含于方程 $W(x)=x$ 的解集中时，有 $W(x)\neq x$，则一定可推出 $W[f(x)]\neq f(x)$。

函数元不等式 $W[f(x)]\neq f(x)$ 的解则是 $W(x)\neq x$，$x\in D$。

当 $D=\mathbf{R}$ 时，显然正确。当 $D\subsetneqq\mathbf{R}$ 时，则在 D 的补集上，函数元不等式 $W[f(x)]\neq f(x)$ 对 $W(x)$ 没有约束，可以取任何值。

对于一个函数元不等式，我们可写出它的所有解，但要一一列出有时会很复杂（如本讲后面例10中Cauchy型函数元不等式 $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ 的解）。

为方便起见，没有特别加以说明的话，本书下面均约定：只给出函数元不等式有约束部分的解，对于没有约束部分的解不再具体写出，理解为可以"任意取值或无定义"。

3. 函数元不等式的分类

函数元不等式非常复杂，要进行分类相当困难。函数元不等式可按其中出现的自变量个数分为单变量函数元不等式（如Gamma型函数元不等式等）和多变量函数元不等式（如Cauchy型函数元不等式）。下面再给出一种分法：

(1) 按元分

函数元不等式中表示未知函数自变量的字母有几个，就称其为几元函数不等式。

如：$f(x+1)>f(x)$ 是一元函数不等式，$f(x)+f(y)>f(x+y)$ 是二元函数不等式。

(2) 按阶分

函数元不等式中未知函数经过几次迭代，就称其为几阶函数不等式。

如：$f[f(x)]\geqslant x-3$ 是二阶函数不等式。

(3) 按次分

函数元不等式中未知函数的最高次项的次数是几，就称其为几次函数不等式。如 $f[f(x)]>f^2(x)-3f(x)$ 就称为二阶二次函数不等式。

(4) 按未知函数的个数分

按照函数元不等式中所含未知函数的个数分。如 $f[f(x)]\geqslant x-3$ 是含有一个未知函数的函数不等式，$f(x)+g(y)\geqslant f(x+y)$ 是含有两个未知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的函数元不等式。

(5) 其他一些具有特殊结构的函数元不等式

对于其他一些具有一定特殊结构的函数元不等式，我们还给出一些特殊的名称。

4. 一点说明

函数元不等式和函数方程（含有未知函数的等式）都是经典的数学课题，许多数学大家都曾研究过。但至今尚未形成完整而系统的一般方法与理论。然而，一些能用初等数学工具解决的简单函数方程和函数不等式问题已成为数学竞赛的重要内容，几乎每隔一两年就有这方面的IMO或CMO试题出现。20世纪90年代后，函数方程开始渗透于我国高考数学试题，主要



涉及解函数方程、函数方程确定的函数性质、函数值的界定等一类。

而更一般的函数元不等式的研究，尚处于起步阶段，函数元不等式理论异常复杂，与函数方程相比更加困难，所以我们的研究步履维艰，虽然获得了一批有意义的结果，取得了一些有价值的成果，但并未建立起系统的理论基础。

特别是函数元不等式在数学的各分支和自然科学乃至社会科学的许多领域内意想不到的、美妙的应用还有待人们发现，只有这样函数元不等式理论才能得到较大的发展，下面给出我们研究取得的一些初步成果，以抛砖引玉。



例题分析

例 1 求函数元不等式

$$f(x+y) \geqslant 2008f(x)-2009f(y) \qquad ①$$

在实数集 $\mathbf{R}$ 或其子集上的两个特解。

解 若 $f(x)=c$（常数）是函数元不等式①的一个特解，代入①得

$$c \geqslant 2008c-2009c.$$

所以 $c \geqslant 0$，即 $f(x)=c(c \geqslant 0)$ 是①式在 $\mathbf{R}$ 上的一个特解。

若 $f(x)=x+\frac{1}{2}$ 是函数元不等式的另一特解，则代入①式得

$$x+y+\frac{1}{2} \geqslant 2008\left(x+\frac{1}{2}\right)-2009\left(y+\frac{1}{2}\right)$$

即 $2007x-2010y-1 \leqslant 0$

解方程组 $\begin{cases} y=x+\frac{1}{2} \\ 2007x-2010y-1=0 \end{cases}$ 得 $x=-\frac{1006}{3}$，

可见 $f(x)=x+\frac{1}{2}, x \in \left[-\frac{1006}{3},+\infty\right)$ 是①式的特解。

故我们已求得函数元不等式①的两个特解为

$$f(x)=c(c \geqslant 0), f(x)=x+\frac{1}{2}, x \in \left[-\frac{1006}{3},+\infty\right).$$

例 2 设 $f(x)=x^n, x \in D, n \in \mathbf{N}^*$，试判断 $f(x)$ 是否为函数不等式

$$f(x)+f(1-x)>1 \qquad ①$$

的一个解？如是，求出定义域 D；若不是，请说明理由。

解 若 $f(x)$ 是不等式①的解，等价于

$$x^n+(1-x)^n>1 \qquad ②$$

有解。



当 $n=1$ 时,② 式为 $1>1$,矛盾.

当 $n>1$ 时,令 $t=x-\frac{1}{2}$,则 ② 式等价于

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}-t\right)^n>1 \qquad ③$$

由于 $\left(\frac{1}{2}+t\right)^n+\left(\frac{1}{2}-t\right)^n=2\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}t^2+C_n^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}t^4+\cdots$

令 $g(u)=2\left(\frac{1}{2}\right)^n+C_n^2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u+C_n^4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}u^2+\cdots$,则 $g(u)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调增函数.

③ 式 $\Leftrightarrow g(t^2)>g\left(\frac{1}{4}\right)\Leftrightarrow t^2>\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{4}\Leftrightarrow x>1$ 或 $x<0$

可见,此时 $f(x)$ 是不等式 ① 的一个解,定义域 $D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

综上,当 $n=1$ 时,$f(x)$ 不是不等式 ① 的解;当 $n>1$ 时,$f(x)$ 可以是不等式 ① 的一个解,其定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$,或其子集 D'(满足 $x\in D'$,必有 $1-x\in D'$).

例 3 (1994 年亚太地区数学奥林匹克试题)设 f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的函数,且

(1) 对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$,$f(x)+f(y)+1\geqslant f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$;

(2) 对于任意 $x\in[0,1)$,有 $f(0)\geqslant f(x)$;

(3) $-f(-1)=f(1)=1$.

求出所有满足条件的函数 f.

解 从(1)和(2)可得 $2f(0)+1\geqslant 2f\left(\frac{1}{2}\right)+1\geqslant f(1)\geqslant f(1)+f(0)$.

但由(3)可知 $f(1)=1$,因此上式可化为 $2f(0)\geqslant 0\geqslant f(0)$,从而有 $f(0)\geqslant 0\geqslant f(0)$,$f(0)=0$.

再由(2),对于任意 $x\in(0,1)$,有 $f(x)\leqslant 0$.

若存在 $x\in(0,1)$ 使 $f(x)<0$,则 $f(1-x)\leqslant 0$,从而由(1)可得

$$1>f(x)+f(1-x)+1\geqslant f(1)=1,$$

矛盾.所以,对于任意 $x\in[0,1)$,都有 $f(x)=0$ ①

由(1)得,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x+1)\geqslant f(x)+f(1)=f(x)+1$

又由(1)和(3)可得,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x)\geqslant f(x+1)+f(-1)=f(x+1)-1.$$

由以上两式得,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x+1)=f(x)+1$. ②

由 ① 和 ② 可得,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $f(x)=[x]$($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数)

例 4 (第 53 届罗马尼亚数学奥林匹克竞赛试题(第一轮))求所有实函数 $f,g,h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得对任意实数 x,y,有

$$(x-y)f(x)+h(x)-xy+y^2\leqslant h(y)\leqslant(x-y)g(x)+h(x)-xy+y^2. \qquad ①$$

解 由式 ① 得 $(x-y)f(x)\leqslant(x-y)g(x)$,易知 $f(x)=g(x)$ 对所有实数 x 均成立.于是,有



$$(x-y)f(x)+h(x)-xy+y^2=h(y)$$

令 $x=0$，得 $h(y)=y^2-f(0)y+h(0)$，即 h 是一个二次函数．定义 $f(0)=a,h(0)=b$，将 $h(y)=y^2-ay+b$ 代入，有

$$(x-y)f(x)+x^2-ax+b-xy+y^2=y^2-ay+b,$$

即 $(x-y)f(x)+x(x-y)-(x-y)a=0$．

由于 x、y 是任意实数，所以，$f(x)=-x+a$．

经验证，$f(x)=g(x)=-x+a,h(x)=x^2-ax+b$ 满足条件，其中 a,b 是实常数，$x\in\mathbf{R}$．

例5 （2007 年第 39 届加拿大数学奥林匹克试题）设 f 是一个实值函数，且对任意实数 x,y，有

$$f(xy)+f(y-x)\geqslant f(y+x) \qquad ①$$

(1) 给出一个非常数的满足条件的多项式 f．

(2) 证明：对任意实数 x，有 $f(x)\geqslant 0$．

解 (1) 设 $f(x)=x^2+4$，则

$$\begin{aligned}&f(xy)+f(y-x)-f(y+x)\\&=(x^2y^2+4)+(y-x)^2+4-(y+x)^2-4\\&=(xy)^2-4xy+4=(xy-2)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

所以 $f(x)=x^2+4$ 就是符合题设条件的一个解．

(2) 令 x,y 满足 $xy=x+y$，即 $(x-1)(y-1)=1$．此时 ① 式变成 $f(y-x)\geqslant 0$，即 $f[(y-1)-(x-1)]\geqslant 0$，由于 $y-1=\frac{1}{x-1}$，所以 $f\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)-(x-1)\right]\geqslant 0$．

令 $u=\frac{1}{x-1}-(x-1)$，则 $u\in(-\infty,+\infty)$，故 $f(u)\geqslant 0,u\in\mathbf{R}$．即 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\geqslant 0$．

例6 （第 9 届中国中学生数学奥林匹克冬令营试题）求适合以下条件的所有函数 $f:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$：

(1) $f(x)\leqslant 2(x+1)$；

(2) $f(x+1)=\frac{1}{x}[(f(x))^2-1]$．

证明 显然函数 $f(x)=x+1$ 为所求的一个解．

下面证明 $f(x)=x+1$ 是本题的唯一解，即证 $g(x)=f(x)-(x+1)=0$ 恒成立．

事实上，我们可把 $f(x)$ 的条件 $\begin{cases}1\leqslant f(x)\leqslant 2(x+1)\\ f(x+1)=\frac{[f(x)]^2-1}{x}\end{cases}$，转变为 $g(x)$ 之条件 $1\leqslant g(x)+x+1\leqslant 2(x+1)$，$g(x+1)+x+2=\frac{[g(x)+(x+1)]^2-1}{x}$，即 $-x\leqslant g(x)\leqslant x+1$，

$$g(x+1)=\frac{[g(x)]^2+2(x+1)g(x)+(x+1)^2-1-x(x+2)}{x}$$



$$=\frac{[g(x)]^2+2(x+1)g(x)}{x}=\frac{g(x)[g(x)+x+x+2]}{x}$$

注意到 $g(x)+x\geqslant 0$，所以有 $g(x)=\dfrac{xg(x+1)}{g(x)+x+x+2}$.

因此由 $-x-1\leqslant g(x)\leqslant x+1$ 有 $|g(x)|\leqslant x+1$.

从而有 $|g(x)|=\dfrac{x|g(x+1)|}{[g(x)+x]+x+2}\leqslant\dfrac{x|g(x+1)|}{x+2}\leqslant\dfrac{x(x+2)}{x+2}=x$

于是由 $|g(x)|\leqslant x$ 推出 $|g(x+1)|\leqslant x+1$

从而有 $|g(x)|\leqslant\dfrac{x(x+1)}{x+2}$，由此得 $|g(x+1)|\leqslant\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+3}$，有 $|g(x)|\leqslant$

$$\frac{\dfrac{x(x+1)(x+2)}{x+3}}{x+2}=\frac{x(x+1)}{x+3}$$

设 n 为正整数，$|g(x)|\leqslant\dfrac{x(x+1)}{x+n}$，则 $|g(x+1)|\leqslant\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+n+1}$，于是 $|g(x)|\leqslant$

$$\frac{x|g(x+1)|}{x+2}\leqslant\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+n+1)}=\frac{x(x+1)}{x+n+1}$$

由数学归纳原理，对一切正整数都有 $|g(x)|\leqslant\dfrac{x(x+1)}{x+n}$

取 $n\to\infty$，便推出 $|g(x)|\leqslant 0$，即 $g(x)=0$ 恒成立.

这就证明了 $f(x)=x+1$ 为唯一解.

评析 此题由不等式与恒等式给出，在证明过程中，反复应用不等式进行估计．当然，此题的解决在于看出 $f(x)=x+1$，然后利用不等式估计，得到 $f(x)-(x+1)=0$，并利用了 $n\to+\infty$ 时取极限的技巧.

例7 （第4届中国中学生数学奥林匹克冬令营试题）设 f 是定义在 $(1,+\infty)$ 上且在 $(1,+\infty)$ 中取值的函数，满足条件：对任意 $x,y>1$ 及 $u,v>0$，都成立

$$f(x^uy^v)\leqslant f^{\frac{1}{4u}}(x)f^{\frac{1}{4v}}(y) \quad ①$$

试确定所有这样的函数 f.

解 先将①式化为一元函数．令 $x=y$，$u=v=\dfrac{t}{2}$，则得：对所有

$$x>1,t>0，都有 f(x^t)\leqslant f^{\frac{1}{t}}(x).$$

令 $x^{\frac{1}{t}}\to x$，得 $f(x)\leqslant f^{\frac{1}{t}}(x^{\frac{1}{t}})$，再令 $\dfrac{1}{t}\to t$，得 $f(x^t)\geqslant f^{\frac{1}{t}}(x)$，所以对所有 $x>1,t>0$，都有 $f(x^t)=f^{\frac{1}{t}}(x)$.

取 $x=e$，$u=e^t$，得到 $f(u)=f^{\frac{1}{\ln u}}(e)$.

令 $a=f(e)>1$，$x\to u$，得 $f(x)=a^{\frac{1}{\ln x}}$，$a>1$.

下面验证这样的函数确实满足要求.



对任意 $x,y>1$ 及 $u,v>0$，我们有 $f(x^uy^v)=a^{\frac{1}{\ln x^uy^v}}=a^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}$，$f^{\frac{1}{4u}}(x)f^{\frac{1}{4v}}(y)=a^{\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}}$，只需证 $\frac{1}{u\ln x+v\ln y}\leqslant\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}\Leftrightarrow(u\ln x)^2+2uv\ln x\ln y+(v\ln y)^2\geqslant 4uv\ln x\ln y$，即 $(u\ln x-v\ln y)^2\geqslant 0$，当然成立

所以 $f(x^uy^v)=a^{\frac{1}{\ln x^uy^v}}=a^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}\leqslant a^{\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}}=f^{\frac{1}{4u}}(x)f^{\frac{1}{4v}}(y)$.

说明 当所给的函数元不等式含有较多的变量时，常常先将它化为一个变量的函数不等式，再利用不等式的证明技巧来处理这类问题

例8 (2005年罗马尼亚数学奥林匹克选拔试题)求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，满足以下两个条件

(1) $x[f(x+1)-f(x)]=f(x)$，对所有的 $x,y\in\mathbf{R}$；

(2) $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$，对所有的 $x,y\in\mathbf{R}$.

解 若 $x>0$，$n\in\mathbf{N}$，由(1)可得 $\frac{f(x+1)}{x+1}=\frac{f(x)}{x}$，于是 $\frac{f(x+n)}{x+n}=\frac{f(x)}{x}$.

则 $|f(x+n)-f(y+n)|=\left|\frac{x+n}{x}f(x)-\frac{y+n}{y}f(y)\right|\leqslant|x-y|$，

即 $\left|f(x)-f(y)+n\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right]\right|\leqslant|x-y|$，

对所有的 $x,y>0$，及 $n\in\mathbf{N}$ 成立

所以存在一个实数 k，使得 $f(x)=kx$，对所有的 $x>0$ 成立.

类似地，存在一个实数 l，使得 $f(x)=lx$，对所有的 $x<0$ 成立

取 $x\in(0,1)$，由等式 $\frac{f(x-1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x}$ 可推出 $l=k$

因此 $f(x)=kx$，其中，$k\in\mathbf{R}$，且 $|k|\leqslant 1$.

例9 给定一个实数 k，确定所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对于任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x^2+2xy+y^2)=(x+y)[f(x)+f(y)]$ 及 $|f(x)-kx|\leqslant|x^2-x|$.

解 由题意得，对于任何 $x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f[(x+y)^2]=(x+y)[f(x)+f(y)],\qquad ①$$

及

$$|f(x)-kx|\leqslant|x(x-1)|.\qquad ②$$

在式①中取 $x=y=0$ 得

$$f(0)=0.\qquad ③$$

在式①中取 $y=0$，并利用式③得

$$f(x^2)=xf(x).\qquad ④$$

由式④易得

$$-xf(-x)=f[(-x)^2]=f(x^2)=xf(x).$$

于是，$f(-x)=-f(x)(x\neq 0)$

再结合式③得

$$f(-x)=-f(x).\qquad ⑤$$

由式⑤知 $f(x)$ 为奇函数，故只考虑 $x>0$ 的情况。

由式④得 $\frac{f(x^2)}{x^2}=\frac{f(x)}{x}$，从而，

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x^{\frac{1}{2}})}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{f(x^{\frac{1}{4}})}{x^{\frac{1}{4}}}=\cdots=\frac{f(x^{\frac{1}{2^n}})}{x^{\frac{1}{2^n}}},\tag{6}$$

其中，$n\in\mathbf{N}^*$。

由式②得 $\left|\frac{f(x)}{x}-k\right|\leqslant|x-1|$。 ⑦

在式⑦中令 x 为 $x^{\frac{1}{2^n}}$，并利用式⑥得

$$\left|\frac{f(x)}{x}-k\right|\leqslant|x^{\frac{1}{2^n}}-1|.\tag{8}$$

在式⑧中固定 x，让 $n\to+\infty$，则由 $x^{\frac{1}{2^n}}\to1$ 可得

$$\left|\frac{f(x)}{x}-k\right|\leqslant|1-1|=0.$$

从而，$\frac{f(x)}{x}-k=0$，故 $f(x)=kx\,(x>0)$。

再由式⑤、③得 $f(x)=kx$。

显然，上式满足题中所有的条件。

故本题的解为 $f(x)=kx\,(x\in\mathbf{R})$。

例 10 求 Cauchy 型函数元不等式 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ 的解。

说明 在文献[2，3]中，法国数学家柯西(Cauchy)研究了函数方程

$$f(x)+f(y)=f(x+y),\tag{1}$$

得到其连续解 $f(x)=ax$，$a\in\mathbf{R}$。

因此，人们通常将函数方程①称为柯西函数方程。

类似地，我们把函数元不等式

$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)\tag{2}$$

称为柯西(Cauchy)型函数元不等式，并把定义在实数集 $\mathbf{R}$ 或其非空子集 D 上，且满足不等式②的函数 $f(x)$，称为函数元不等式②的解函数(简称解)。

笔者在期刊全文数据库中进行了检索，并翻查了很多的数学文献资料，没有发现有论述函数不等式②的专题文章。但第15届(2004)"希望杯"全国数学竞赛高一年级第2试第10题，给出了函数不等式②在 $[0,+\infty)$ 上的2个解函数。

原题：已知集合 M 是满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体：

(1) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，函数值为非负实数；

(2) 对于任意实数 $s,t\in[0,+\infty)$，都有 $f(s+t)\geqslant f(s)+f(t)$。

在函数 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=2^x-1$，$f_3(x)=\ln(x+1)$ 中，属于 M 的有 (　　)



A. $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$　　　　　B. $f_1(x)$ 和 $f_3(x)$

C. $f_2(x)$ 和 $f_3(x)$　　　　　D. $f_1(x)$、$f_2(x)$ 和 $f_3(x)$.

解　显然，三个函数都满足条件(1)；$f_1(x)$ 显然满足条件(2)。

$f_2(x)=2^x-1$ 满足条件(2)$\Leftrightarrow 2^{x+y}-1\geqslant 2^x-1+2^y-1$

$\Leftrightarrow 2^{x+y}-2^y\geqslant 2^x-1\Leftrightarrow 2^y(2^x-1)\geqslant 2^x-1$

因为 $2^y\geqslant 1$，所以上式显然成立，即 $f_2(x)=2^x-1$ 满足条件(2)

$f_3(x)=\ln(x+1)$ 满足条件(2)

$\Leftrightarrow \ln(x+y+1)\geqslant \ln(x+1)+\ln(y+1)\Leftrightarrow \ln(x+y+1)\geqslant \ln(xy+x+y+1)$

此结论显然是错误的，故 $f_3(x)=\ln(x+1)$ 不满足条件(2)．故选(A)

这一竞赛题给出了函数不等式②在 $[0,+\infty)$ 上的 2 个解函数：$f_1(x)=x$，$f_2(x)=2^x-1$

事实上，结论是丰富多彩的，函数不等式②还存在各种各样的解，并与定义域关系密切，其解的个数是无限的．解函数可以含有一次函数、二次函数、绝对值、三角函数、根式和高斯函数等．

① **R** 上的一次函数解：$f(x)=2x$；$f(x)=3x-1$；$f(x)=\frac{1}{2}x-3$ 等．

证明　略

② **R** 上含有绝对值的解 $f(x)=-|x|$．

证明　由 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$ 易证

③ **R** 上含三角函数的解：$f(x)=-|\sin x|$．

证明　因为 $|\sin(x+y)|=|\sin x\cos y+\sin y\cos x|\leqslant|\sin x|\cdot|\cos y|+|\sin y|\cdot|\cos x|\leqslant|\sin x|+|\sin y|$

所以 $-|\sin(x+y)|\geqslant(-|\sin x|)+(-|\sin y|)$，即 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$．

④ **R** 上含无理函数的解：$f(x)=-\sqrt{|x|}$

证明　$\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=\sqrt{|x|+|y|+2\sqrt{|x|}\cdot\sqrt{|y|}}$

$$\geqslant\sqrt{|x|+|y|}\geqslant\sqrt{|x+y|}$$

两边同乘 -1，即得 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$．

⑤ **R** 上含无理函数的复合解：$f(x)=-\sqrt{|\sin x|}$

证明　应用③、④中已证明的结论：

$$\sqrt{|\sin x|}+\sqrt{|\sin y|}\geqslant\sqrt{|\sin x|+|\sin y|}\geqslant\sqrt{|\sin(x+y)|},$$

两边同乘 -1，即得 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$．

⑥ $[0,+\infty)$ 上的幂函数解：$f(x)=x^2$

证明　对于任意的非负数 x,y，$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\geqslant x^2+y^2$．

即　$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$．



⑦ $[0,+\infty)$ 上含幂函数的解：$f(x)=-\sqrt{x}$.

证明 对于任意的非负数 x,y，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}=\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}\geqslant\sqrt{x+y}$

两边同乘 -1，即得 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$.

⑧ $\mathbf{R}$ 上的不连续解 $f(x)=[x]$，这里 $[x]$ 是高斯函数，表示不超过 x 的最大整数

证明 $x=[x]+\{x\}$，$y=[y]+\{y\}$，这里 $0\leqslant\{x\}<1$，$0\leqslant\{y\}<1$，于是，$0\leqslant\{x\}+\{y\}<2$，所以

$[x+y]=[[x]+[y]+\{x\}+\{y\}]=[[x]+[y]]+[\{x\}+\{y\}]\geqslant[x]+[y]$

即 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$.

……

结果是五彩缤纷的，一些结果还可推广到一般情形

① 的推广：$\mathbf{R}$ 上的一次函数解：$f(x)=ax+b(b\leqslant 0)$

证明 $f(x+y)=a(x+y)+b=f(x)+f(y)-b\geqslant f(x)+f(y)$

②④ 的联合推广：$\mathbf{R}$ 上含有绝对值的解：$f(x)=-|x|^a$，$a\in(0,1]$

证明 当 $x=0$，或 $y=0$ 时，显然成立.

当 $xy\neq 0$ 时，$|x|+|y|>0$，且 $0<\dfrac{|x|}{|x|+|y|}<1$，$0<\dfrac{|y|}{|x|+|y|}<1$.

对于 $a\in(0,1]$，由于 $y=a^x(0<a<1)$ 是减函数，所以

$$\frac{|x|}{|x|+|y|}\leqslant\left(\frac{|x|}{|x|+|y|}\right)^a,\ \frac{|y|}{|x|+|y|}\leqslant\left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right)^a$$

两个同向不等式相加，得

$$\frac{|x|}{|x|+|y|}+\frac{|y|}{|x|+|y|}\leqslant\left(\frac{|x|}{|x|+|y|}\right)^a+\left(\frac{|y|}{|x|+|y|}\right)^a$$

即 $|x|^a+|y|^a\geqslant(|x|+|y|)^a\geqslant(|x+y|)^a$.

两边同乘 -1，即得 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$.

⑥ 的两个推广：

（Ⅰ）$[0,+\infty)$ 上的幂函数解 $f(x)=x^a$，$a\in(1,+\infty)$.

证明 当 $xy=0$ 时，显然

当 $x,y>0$ 时，由 $a\in(1,+\infty)$，得 $\dfrac{x}{x+y}>\left(\dfrac{x}{x+y}\right)^a$，$\dfrac{y}{x+y}>\left(\dfrac{y}{x+y}\right)^a$

两个同向不等式相加，得

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+y}>\left(\frac{x}{x+y}\right)^a+\left(\frac{y}{x+y}\right)^a$$

即 $(x+y)^a>x^a+y^a$.

综上，得 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$.

（Ⅱ）$[0,+\infty)$ 上的连续解：$f(x)=ax^2+bx+c$，$c<0$，$a>0$.

证明 对任意的非负数 x,y，$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)\Leftrightarrow c\leqslant 2axy$，后一不等式显然成立



⑦ 的推广 $\mathbf{R}^+$ 上含幂函数的解 $f(x)=-x^a, a\in(0,1]$.

证明 与上面(Ⅰ)类似,略.

⑧ 的推广 $\mathbf{R}$ 上的不连续解: $f(x)=a[x]+b(a>0,b\leqslant 0)$,这里 $[x]$ 表示高斯函数,表示不超过 x 的最大整数.

证明 略.

除了上面已给出的这些解之外,函数不等式②还存在许多具有特殊结构的解函数.下面再介绍一些笔者研究得到的结论:

1. 具有特殊结构的单变量解函数

① $\mathbf{R}$ 上含绝对值的解 $f(x)=-\dfrac{|x|^a}{1+|x|^a}$,这里 $0<a\leqslant 1$.

证明 对任意的实数 x,y,根据不等式③,

$$\frac{|x|^a}{1+|x|^a}+\frac{|y|^a}{1+|y|^a}\geqslant\frac{|x|^a}{1+|x|^a+|y|^a}+\frac{|y|^a}{1+|x|^a+|y|^a}$$

$$=\frac{|x|^a+|y|^a}{1+|x|^a+|y|^a}=1-\frac{1}{1+|x|^a+|y|^a}$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{1+(|x|+|y|)^a}\geqslant 1-\frac{1}{1+(|x+y|)^a}$$

$$=\frac{(|x+y|)^a}{1+(|x+y|)^a}$$

两边同乘 -1,即得 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$.

② $\mathbf{R}$ 上连续但至少有一点不可导的指数形式的解 $f(x)=a^{|x|}-1,(0<a<1)$

证明 由于 $0<a<1$,易知 $0<a^{|x|}\leqslant 1, a^{|x+y|}\geqslant a^{|x|+|y|}$,于是

$$f(x+y)=a^{|x+y|}-1\geqslant a^{|x|+|y|}-1$$

$$=(a^{|x|}-1)(a^{|y|}-1)+(a^{|x|}-1)+(a^{|y|}-1)$$

$$\geqslant(a^{|x|}-1)+(a^{|y|}-1)=f(x)+f(y).$$

等号当且仅当 $x=0$ 或 $y=0$ 时取到.

注 根据罗必达法则

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-e^{-x\ln a}\ln a}{1}=-\ln a,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a^{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln a}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln a}\ln a}{1}=\ln a$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$,即 $f(x)$ 在0点不可导.

③ $\mathbf{R}$ 上无处连续的解: $f(x)=\begin{cases}-1, x\text{是无理数}\\ 0, x\text{是有理数}\end{cases}$.

证明 当 x,y 都是有理数时,$x+y$ 是有理数,所以 $f(x+y)=0, f(x)+f(y)=0$,故 $f(x+y)=f(x)+f(y)$;



当 x,y 都是无理数时，$x+y$ 可能是无理数，也可能是有理数，所以 $f(x+y)=-1$ 或 0，$f(x)+f(y)=-2$，故 $f(x+y)>f(x)+f(y)$；

当 x,y 一个是无理数，另一个是有理数时，$x+y$ 是无理数，$f(x+y)=-1$，$f(x)+f(y)=-1$，故 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

综上，$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ 恒成立，说明 $f(x)=\begin{cases}-1, & x\text{是无理数}\\ 0, & x\text{是有理数}\end{cases}$ 是不等式②的一个分段函数形式的解，且它无处是连续的(证略).

④ $\mathbf{R}$ 上仅在一点连续，且无处单调的一一对应的解

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\text{是区间}[0,1]\text{中的有理数}\\ x-2, & x\text{是区间}[0,1]\text{中的无理数}\end{cases}$$

证明 (Ⅰ) 当 x,y 都是区间 $[0,1]$ 中的有理数时，$x+y$ 是有理数，所以

$$f(x+y)=-x-y,\ f(x)+f(y)=-x-y,$$

显然有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$；

(Ⅱ) 当 x,y 都是区间 $[0,1]$ 中的无理数时，$f(x)=x-2$，$f(y)=y-2$.

若 $x+y$ 是无理数，则 $f(x+y)=x+y-2$，$f(x)+f(y)=(x-2)+(y-2)$，故 $f(x+y)>f(x)+f(y)$ 也成立；

若 $x+y$ 是有理数，则 $f(x+y)=-(x+y)$.

由于 $f(x+y)-f(x)-f(y)=-(x+y)-(x-2)-(y-2)=2[2-(x+y)]\geqslant 0$，

所以 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$；

(Ⅲ) 当 x,y 一个是无理数，另一个是有理数时，$x+y$ 是无理数，$f(x+y)=(x+y)-2$，

$f(x)+f(y)=-x+(y-2)$，或 $f(x)+f(y)=-y+(x-2)$，易知

$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ 成立.

综上，对 $\forall x,y\in[0,1]$，都有 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$ 成立，即 $f(x)$ 是不等式②的一个解，且它是无处单调的一一对应函数，仅在 $-x=x-2$ 即 $x=1$ 一点是连续的(证略).

⑤ $\mathbf{R}^+$ 上含有抽象函数的解：函数 $f(x)=xg(x)$，$x\in\mathbf{R}^+$，其中 $g(x)$，$x\in\mathbf{R}^+$ 是递增函数.

证明 设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}^+$，则 $x_1\leqslant x_1+x_2$，$x_2\leqslant x_1+x_2$.

由 $g(x)$，$x\in\mathbf{R}^+$ 是递增函数，得 $g(x_1)\leqslant g(x_1+x_2)$，$g(x_2)\leqslant g(x_1+x_2)$，因此有

$$\begin{cases}\dfrac{f(x_1)}{x_1}\leqslant\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},\\[2mm] \dfrac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2},\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}(x_1+x_2)f(x_1)\leqslant x_1f(x_1+x_2),\\ (x_1+x_2)f(x_2)\leqslant x_2f(x_1+x_2).\end{cases}$$

两式相加得，

$$(x_1+x_2)f(x_1)+(x_1+x_2)f(x_2)\leqslant x_1f(x_1+x_2)+x_2f(x_1+x_2)$$

$$(x_1+x_2)[f(x_1)+f(x_2)]\leqslant(x_1+x_2)f(x_1+x_2)$$



因为 $x_1+x_2\geqslant 0$，所以 $f(x_1)+f(x_2)\leqslant f(x_1+x_2)$。

⑥ $[0,+\infty)$ 上凸函数形式的解　$g(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上可微的下凸函数，则 $f(x)=g(x)-g(0)$ 是函数不等式②的一个解。

证明　不妨设 $x\leqslant y$，利用微分中值定理，则有

$$g(x+y)-g(y)=g'(\xi)x,\xi\in[y,x+y]$$
$$g(x)-g(0)=g'(\zeta)x,\zeta\in[0,x]$$

由于 $g(x)$ 是定义在 $[0,+\infty)$ 上可微的下凸函数，所以 $g''(x)\geqslant 0$，$g'(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递增函数，由 $\zeta\leqslant\xi$，得 $g'(\zeta)\leqslant g'(\xi)$，所以 $g(x+y)-g(y)\geqslant g(x)-g(0)$，

$$[g(x+y)-g(0)]-[g(y)-g(0)]\geqslant g(x)-g(0)$$

即
$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)$$

⑦ 闭区间 $[0,c]$ 上的凸函数解

设 $f(x)$ 定义在 $[0,2c]$ 上，且满足 $f(0)=0$，$f''(x)\geqslant 0$，则 $f(x)$，$x\in[0,c]$ 是函数不等式②的一个解。

证明　由题意，$f(x)$ 在 $[0,2c]$ 上可导，且 $f'(x)$ 单调递增。

对任意的 $0\leqslant x<y\leqslant c$，有 $0<x+y\leqslant 2c$。

令
$$F(t)=f(t+x)-f(x)-f(t)$$

则
$$F'(t)=f'(t+x)-f'(t)$$

为 $f'(t)$ 单调增加，$x\geqslant 0$，$t+x\geqslant t$，所以 $f'(t+x)\geqslant f'(t)$，即 $F'(t)\geqslant 0$，说明 $F(t)$ 单调增加，于是对 $x\in[0,y]$，有 $F(y)\geqslant F(0)=0$

即
$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y).$$

⑧ 在文献[3]中第371页组合凸性不等式中提到：设 f 是区间 $[0,c]$ 上非负的连续函数，若对 $\forall x,y\in[0,c]$，都有 $f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$，则称函数 f 具有超加性。

容易证明，若 f 具有超加性，则函数 $f(x)$，$x\in\left[0,\frac{c}{2}\right]$ 是不等式②的一个解

⑨ $[0,c]$ 上的积分解　设可积函数 $g(x)$ 在 $[0,2c]$ 上单调递增，则对任意的 $a\in(0,c]$，$b\leqslant 0$，函数 $f(x)=ax+b+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 是不等式②的一个解。

证明　由于 $g(x)$ 是 $[0,2c]$ 上的单调递增函数，对任意的 $0\leqslant x<y\leqslant c$，有 $0<x+y\leqslant 2c$，$g(t+x)\geqslant g(t)$，$t\in[0,c]$ 恒成立。

所以 $\int_0^y g(t+x)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^y g(t)\mathrm{d}t$，等价于 $\int_x^{x+y} g(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^y g(t)\mathrm{d}t$。

于是
$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+y} g(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t,$$

$$a(x+y)+\int_0^{x+y} g(t)\mathrm{d}t\geqslant ax+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+ay+\int_0^y g(t)\mathrm{d}t,$$

即
$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y).$$

⑩ $[0,+\infty)$ 上的积分解：设可积函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则对任意的 $x\in[0,$



$+\infty)$，$b\leqslant 0$，函数 $f(x)=ax+b+\int g(t)dt$ 是不等式②的一个解

证明　在⑨中令 $c\to+\infty$，即可证得⑩。

2　具有特殊结构的多变量解函数

上面讨论的是单变量的解函数，下面给出几个多变量的解。

为方便起见，下面设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$n\in\mathbf{N}^+$，不再加以说明。

① C 上的解：$f(z)=-|z|$。

证明　由 $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$ 得 $f(z_1)+f(z_2)\leqslant f(z_1+z_2)$。

这一结论可推广为

设 $X,Y\in\mathbf{R}^n$，则 $f(X)=-|X|$ 是不等式②的一个解。

② $f(X)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，$a_i,x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 是不等式②的一个解

证明　$f(X)+f(Y)\leqslant f(X+Y)$ 就是著名的赫得尔不等式

③ 设 $X=(x_1,x_2,x_3)$，$Y=(y_1,y_2,y_3)$，$X+Y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$，这里 $x_i>0$，$y_i>0$，$i=1,2,3$。则

$f(X)=\sqrt{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}$ 是不等式②的一个解，即满足不等式：$f(X+Y)\geqslant f(X)+f(Y)$。

等号成立当且仅当 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$ 时成立

证明　$f(X+Y)\geqslant f(X)+f(Y)$ 即

$$\sqrt{(x_1+y_1)(x_2+y_2)+(x_2+y_2)(x_3+y_3)+(x_3+y_3)(x_1+y_1)}$$

$$\geqslant\sqrt{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}+\sqrt{y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1}$$

两边平方后，知其等价于

$$x_1(y_2+y_3)+x_2(y_3+y_1)+x_3(y_1+y_2)$$

$$\geqslant 2\sqrt{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}\cdot\sqrt{y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1} \tag{4}$$

设 a_i,b_i,c_i,Δ_i 是 $\triangle A_iB_iC_i(i=1,2)$ 的三边和面积，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$，则若令 $a_1=a_2=\sqrt{y_2+y_3}$，$b_1=b_2=\sqrt{y_3+y_1}$，$c_1=c_2=\sqrt{y_1+y_2}$，由秦九韶面积公式可得 $\sqrt{\Delta_1\Delta_2}=\frac{1}{2}\sqrt{y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1}$，于是代入笔者在文献[9]、[35]中证明的不等式：

$$\lambda_1a_1a_2+\lambda_2b_1b_2+\lambda_3c_1c_2\geqslant 4\sqrt{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\cdot\sqrt{\Delta_1\Delta_2}$$

等号当且仅当 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$，且 $\frac{a_1}{\lambda_2+\lambda_3}=\frac{b_1}{\lambda_3+\lambda_1}=\frac{c_1}{\lambda_1+\lambda_2}$ 时成立

可得 $\lambda_1(y_2+y_3)+\lambda_2(y_3+y_1)+\lambda_3(y_1+y_2)\geqslant 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\cdot\sqrt{y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1}$

它与不等式④是一样的



④ 在文献[4]中介绍了支撑不等式 设集合 $D\subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个锥，即对所有的 $X\in D$，$\lambda>0$，都有 $\lambda X\in D$；若 $f(\lambda X)=\lambda f(X)$，则称 f 是正齐次函数. 正齐次函数 f 是凸的，当且仅当对于凸锥 D 中所有的点 X,Y，成立 $f(X+Y)\leqslant f(X)+f(Y)$.

这说明凸的正齐次函数 f 一定是不等式②的一个解.

需要注意的是 求解函数元不等式得到的解函数，如果求解过程不等价，就不一定满足原来的函数不等式. 如：

设 $f(x+y)-f(x)-f(y)=g(x,y)$，$\forall x,y\in\mathbf{R}$，$g(x,y)\geqslant 0$.

对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，满足 $g(x,y)=g(y,x)\geqslant 0$.

易知对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，满足 $g(x,0)=g(0,y)=-f(0)$，

$$f(x+y)-f(x)-[f(y)-f(0)]=g(x,y)+f(0)=g(x,y)-g(x,0),$$

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}-\left[\frac{f(y)-f(0)}{y}\right]=\frac{g(x,y)-g(x,0)}{y},$$

令 $y\to 0$，得 $f'(x)-f'(0)=\frac{\partial g(x,0)}{\partial y}$.

由此可得

$$f(x)=xf'(0)+\int^{x}\frac{\partial g(x,0)}{\partial y}\mathrm{d}x+c, \qquad ①$$

取 $g(x,y)=2xy$，得 $f(x)=x^2$ 是函数方程

$$f(x+y)-f(x)-f(y)=g(x,y),$$

的解，但由①式得 $f(x)=xf'(0)+x^2+c$，并不一定是函数不等式的解，需要代入进行检验.

能力训练 2

1. (2007 年河北省高中数学竞赛试题) 在四个函数 ① $f(x)=x^2$，② $f(x)=1-x^2$，③ $f(x)=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$，④ $f(x)=2x+1$ 中，满足条件 $f\left(\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}\right)\geqslant\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}f(y)$ 的函数的个数有 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为无理数}\\ 0, & x \text{ 为有理数}\end{cases}$，对所有的实数 x 均满足 $g(x)\geqslant xf(x)$ 的函数 $g(x)$ 是 ( )

A. $g(x)=\cos x$　　B. $g(x)=x$　　C. $g(x)=x^2$　　D. $g(x)=1$

3. (2006 年全国高中数学联合竞赛江西省预赛试题) 集合 M 由满足如下条件的函数 $f(x)$ 组成：当 $x_1,x_2\in[-1,1]$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 4|x_1-x_2|$. 对于两个函数 $f_1(x)=$



x^2-2x+5，$f_2(x)=\sqrt{|x|}$，以下关系中成立的是 （　　）

A. $f_1\in M, f_2\in M$　　B. $f_1\notin M, f_2\notin M$

C. $f_1\notin M, f_2\in M$　　D. $f_1\in M, f_2\notin M$

4. 若 $f(x)=x+1, x\in(-\infty, a]$ 是函数不等式 $f(x+y)\leqslant 2f(x)-3f(y)$ 的一个解，则实数 a 的取值范围是 （　　）

A. $\{-2\}$　　B. $(-\infty,-2]$　　C. $[-2,+\infty)$　　D. $\mathbf{R}$

5. （2006年浙江省高考题改编）函数 $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ 满足 $f(f(x))\geqslant f(x)$，则这样的函数个数共有 （　　）

A. 1个　　B. 4个　　C. 8个　　D. 10个

6. （第14届"希望杯"高一年级第1试第25题）函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，值域是 $(1,4)$，对于定义域内不等正实数 x_1, x_2 都有 $f(x_1)+f(x_2)<2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，请写出两个满足条件的（不同类型的）函数解析式是______，______。

7. 是否存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x^2)-f^2(x)\geqslant\frac{1}{4}$，并且对不同的 $x\in\mathbf{R}$，函数值 $f(x)$ 也不相同。

8. 已知定义在全体实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：① 对任意 $x\in\mathbf{R}$，$0<f(x)\leqslant a$（a 是固定常数）；② 对任意 $x, y\in\mathbf{R}$，$\sqrt{f(x)f(y)}\geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)$。求证：$f(x)$ 是一个常值函数。

9. （1994年江苏省高中数学竞赛题）已知对任意实数 x，函数 $f(x)$ 都有定义，且 $f^2(x)\leqslant 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$，如果集合 $A=\{a \mid f(a)>a\}$ 不是空集，试证 A 是无限集。

10. 定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

(1) $f(0)=0$；

(2) 对任意实数 x, y，都有 $g(x-y)\geqslant f(x)f(y)+g(x)g(y)$

求证：$f^{2008}(x)+g^{2008}(x)\leqslant 1$

11. 试求出所有的增函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，对每一个 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)f[f(x)]\leqslant x^2$。

12. 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续的，$f(0)=1$，且 $f(x+y)\geqslant f(x)f(y)$，试求 $f(x)$。

13. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x+2)=2-f(x)$，$f(x+3)\geqslant f(x)$，试求 $f(x)$。

14. （2007年北京市高一数学竞赛试题）已知一次函数 $f(x)=ax+b$ 对任意的 $x, y\in[0,1]$ 都满足 $|f(x)+f(y)-xy|\leqslant\frac{1}{4}$，试确定这样的 $f(x)$。

15. （第48届IMO预选题改编）若函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，使得对所有 x、$y\in\mathbf{R}^+$，有 $f[x+f(y)]\geqslant f(x+y)+f(y)$，其中，$\mathbf{R}^+$ 为正实数集

16. （1994年IMO预选题改编）设 $\mathbf{R}^+$ 是所有正实数组成的集合，α, β 是给定非零实数，寻找所有函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，使得对 $\mathbf{R}^+$ 内所有 x 和 y，有 $f(x)f(y)\geqslant\frac{y^\alpha}{x^\alpha+x^\beta}[f(x)]^2+\frac{x^\beta}{y^\alpha+y^\beta}[f(y)]^2$。①



17. 设 $f(x)$ 为二次函数，且 $f(0)=12$

$$g(x)=2^x f(x), \quad ①$$

$$g(x+1)-g(x)\geqslant 2^{x+1}x^2, \quad ②$$

求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式.

18. (2006 年清华大学自主招生数学试题) 已知 $f(x)$ 满足：对实数 a,b 有 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$，且 $|f(x)|\leqslant 1$，求证 $f(x)$ 恒为零. (可用以下结论：若 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$，$|f(x)|\leqslant M$，$M$ 为一常数，那么 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]=0$)

19. (第 26 届俄罗斯数学奥林匹克 11 年级第 1 题) 找出所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，它们对一切 $x,y,z\in\mathbf{R}$ 满足不等式 $f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\geqslant 3f(x+2y+3z)$.

20. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上有意义，且满足以下两个条件：

① $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上单调递减且 $f(x)>\dfrac{1}{x^2}$；

② 在 $\mathbf{R}^+$ 上恒有 $f^2(x)\cdot f\left[f(x)-\dfrac{1}{x^2}\right]=f^2(1)$.

(1) 求 $f(1)$ 的值；

(2) 给出一个满足条件的函数 $f(x)$，并加以验证.

21. 求所有的函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，使得对任意实数 x,y,z，有 $\dfrac{1}{2}f(xy)+\dfrac{1}{2}f(xz)-f(x)f(yz)\geqslant\dfrac{1}{4}$. ①

22. 函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ 满足条件：对任意 $x,y,u,v\in\mathbf{R}^+$，都有 $f\left(\dfrac{x}{2u}+\dfrac{y}{2v}\right)\leqslant\dfrac{1}{2}uf(x)+\dfrac{1}{2}vf(y)$，试求所有这样的函数 f.

23. (1995 年第 10 届中国数学奥林匹克试题) 设 $\mathbf{N}$ 是正整数的集合. 设 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 适合条件：$f(1)=1$，且对任意正整数 n 都有 $\begin{cases}3f(n)f(2n+1)=f(2n)[1+3f(n)],\\ f(2n)<6f(n).\end{cases}$ 试求方程 $f(k)+f(l)=293$，$k<l$ 的所有解.

24. (2004 年罗马尼亚数学奥林匹克试题) 找出所有的一一映射 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，对所有的正整数 n 都满足 $f[f(n)]\leqslant\dfrac{n+f(n)}{2}$.

25. 设 f 在正整数集上定义，对一切 $m,n\in\mathbf{N}$ 都有 $f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$，而且 $f(n+1)\geqslant f(n)$，试求 $f(n)$.



第 讲　函数元不等式的常用解法

知识汇总

函数元不等式常用的求解方法有：参函数法、赋值法、变量代换法、待定函数法、迭代法、分离法、归纳递推法、基本不等式法、两边夹法、反面思考法、构造法、求极限法、微积分法、幂级数法，其他一些初等技巧如参数方程法、基本不等式法等.

我们将通过一些具体的例子来阐述函数元不等式常用的求解方法，这些方法有一定的局限性，有时可能需要对不等式中的未知函数做一些特别的限制，下面就做进一步的详尽介绍，为方便计，本讲下面函数元不等式均简称为函数不等式，并按求解方法分块举例进行讲解.

例题分析

1. 参函数法

解函数不等式的基本思想：通过引入参函数，转化为函数方程来解.

函数不等式 $f(x)\geq 0\iff$ 函数方程 $f(x)=p(x)$，$\forall p(x)\geq 0$，$p(x)$ 称为参函数.

当 $p(x)=0$ 时，函数不等式 $f(x)\geq 0$ 就变成函数方程 $f(x)=0$，因此函数不等式 $f(x)\geq 0$ 可看做函数方程 $f(x)=0$ 的一种推广.

参函数可以直接引入，也可以对原函数不等式作适当变形后再引入，这要看所给函数不等式的外形结构特点而定.

例1　设 $f(x)$：$\mathbf{R}^-\to\mathbf{R}^+$，$f\left(\frac{1}{x}\right)\geq x+\sqrt{x^2+1}$，试求 $f(x)$.

解　引入参函数 $p(x)$（$\forall p(x)\geq 0$，$x\in\mathbf{R}^-$），令 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}+p(x)$，则

$f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{x^2+1}+p(x)=\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}+p\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)$，所以函数不等式的通解为

$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+p\left(\frac{1}{x}\right)$ $(\forall p(x)\geqslant 0, x\in\mathbf{R})$.

检验 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}+p\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)=x+\sqrt{x^2+1}+p(x)\geqslant x+\sqrt{x^2+1}$，所以

$f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+p\left(\frac{1}{x}\right)$ $(\forall p(x)\geqslant 0, x\in\mathbf{R})$是所给函数不等式的解.

评析 (1) 这里的检验是解函数不等式的一个重要组成部分.因为求 $f(x)$ 时,我们首先假定了函数不等式存在解 $f(x)$,这样求出的 $f(x)$ 只是满足必要性,也就是说,只有函数不等式有解,求出的 $f(x)$ 才是函数不等式的解.如果函数不等式没有解,那么求出的 $f(x)$ 并不是原函数不等式的解.因此,必须检验充分性.有时候所得的解显然满足原函数不等式,我们就省略了.

2. 当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$p\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant 0\Leftrightarrow p(x)\geqslant 0$,故所给函数不等式的解也可简洁地写成:

$f(x)\geqslant\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}, x\in\mathbf{R}$.

但这一表达形式是无法回代检验的,因为不等式没有"传递"的性质.

例 2 解函数不等式 $f(-x)\leqslant x^4-2x^2+3x-1$.

解 引入参函数 $p(x)(\forall p(x)\leqslant 0, x\in\mathbf{R})$,令 $f(-x)=x^4-2x^2+3x-1+p(x)$,则

$$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2-3(-x)-1+p(-(-x))$$

所以 $f(x)=x^4-2x^2-3x-1+p(-x)$,其中 $\forall p(x)\leqslant 0, x\in\mathbf{R}$.

评析 由于引入参函数是等价变换,可以不必代回原不等式检验.但对引入参函数后得到的函数方程的解进行检验,还是必需的.

引入参函数后得到的函数方程的求解,有时要将变量作适当的替换(替换过程应注意保持函数的定义域不改变),得到一个或几个新的函数方程,然后将它们与原方程联立,通过消元求得原函数方程的解.

本题的结论也可简洁地写成:$f(x)\leqslant x^4-2x^2-3x-1, x\in\mathbf{R}$.

例 3 设偶函数 $f(x)$ 和奇函数 $g(x)$ 都是定义在 $[-3,3]$ 上,且满足

$$f(x)+g(x)\geqslant 2007x\sqrt{9-x^2}+x^{2008},$$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$.

解 引入参函数 $p(x)(\forall p(x)\geqslant 0, x\in[-3,3])$,令



$$f(x)+g(x)=2007x\sqrt{9-x^2}+x^{2008}+p(x) \qquad ①$$

用 $-x$ 代换上式中的 x,得

$$f(x)-g(x)=-2007x\sqrt{9-x^2}+x^{2008}+p(-x) \qquad ②$$

解①,②联立的方程组,得函数不等式的解为

$$f(x)=x^{2008}+\frac{p(x)+p(-x)}{2},x\in[-3,3]$$

$$g(x)=2007x\sqrt{9-x^2}+\frac{p(x)-p(-x)}{2},x\in[-3,3]$$

其中参函数 $\forall p(x)\geqslant 0,x\in[-3,3]$.

说明 由于 $\frac{p(x)+p(-x)}{2}$ 是偶函数,$\frac{p(x)-p(-x)}{2}$ 是奇函数,所以本题的结论不能像例1和例2那样,再改写成更简洁的用不等号表达的形式.

例4 已知函数 $f(x)$ 满足:$f(0)=1,f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$,且对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,有

$$f(x+y)+f(x-y)\leqslant 2f(x)\cos y$$

试求 $f(x)$.

解 设 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y+g(x,y),\forall g(x,y)\leqslant 0$. ①

令 $x=0,y=t$ 代入①式可得

$$f(t)+f(-t)=2f(0)\cos t+g(0,t)=2\cos t+g(0,t). \qquad ②$$

令 $x=\frac{\pi}{2}+t,y=\frac{\pi}{2}$,代入②式可得

$$f(t+\pi)+f(t)=g\left(\frac{\pi}{2}+t,\frac{\pi}{2}\right) \qquad ③$$

令 $x=\frac{\pi}{2},y=\frac{\pi}{2}+t$,代入①式可得

$$f(t+\pi)+f(-t)=-2f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t+g\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+t\right)=-4\sin t+g\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+t\right). \qquad ④$$

②+③−④,得

$$2f(t)=2\cos t+4\sin t+g(0,t)+g\left(\frac{\pi}{2}+t,\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+t\right).$$

所以 $f(t)=\cos t+2\sin t+\frac{1}{2}\left[g(0,t)+g\left(\frac{\pi}{2}+t,\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+t\right)\right]$.

故 $f(x)=\cos x+2\sin x+\frac{1}{2}\left[g(0,x)+g\left(\frac{\pi}{2}+x,\frac{\pi}{2}\right)-g\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+x\right)\right]$

其中 $\forall x,y\in\mathbf{R}$,有 $g(x,y)\leqslant 0$.

评析 (1) 本题所设参函数 $g(x,y)$ 为二元函数,由于我们采用特殊化的方法,所求函数不等式的解是在不等价变换下求出的,只是函数不等式的"形式解".对任一取定的 $g(x,y)$,



求出的 $f(x)$ 还必须代入原不等式中检验

(2) 若给予条件 $f(0)=a, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b, g(x,y)=0$。

则函数不等式变成函数方程

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y. \tag{5}$$

其解为

$$f(x)=a\cos x+b\sin x. \tag{6}$$

检验 因为若 $f(x)=a\cos x+b\sin x$，则

$$\begin{aligned}
&f(x+y)+f(x-y)\\
&=[a\cos(x+y)+b\sin(x+y)]+[a\cos(x-y)+b\sin(x-y)]\\
&=a[\cos(x+y)+\cos(x-y)]+b[\sin(x+y)+\sin(x-y)]\\
&=2a\cos x\cos y+2b\sin x\cos y\\
&=2(a\cos x+b\sin x)\cos y\\
&=2f(x)\cos y
\end{aligned}$$

所以 ⑥ 式为函数方程 ⑤ 的解.

例 5 设 f 的定义域为 $\mathbf{N}$，满足 $f(1)=1$，且对任意的 $m,n\in\mathbf{N}$，

$$f(m+n)\geqslant f(m)+f(n)+mn$$

试求 $f(n)$

解 引入参函数 $g(n,m)(\forall g(n,m)\geqslant 0)$，令

$$f(m+n)=f(m)+f(n)+mn+g(n,m), \tag{1}$$

取 $m=1$ 代入式 ①，可得

$$f(n+1)=f(1)+f(n)+n+g(n,1)=f(n)+(n+1)+g(n,1), \tag{2}$$

以 $n=1,2,\cdots,k-1$ 代入 ① 可得

$$\begin{aligned}
&f(2)=f(1)+2+g(1,1),\\
&f(3)=f(2)+3+g(2,1),\\
&\cdots\\
&f(k)=f(k-1)+k+g(k-1,1),
\end{aligned}$$

将这 $k-1$ 个式子加起来，可得

$$\begin{aligned}
f(k)&=f(1)+2+3+4+\cdots+k+g(1,1)+g(2,1)+\cdots+g(k-1,1)\\
&=1+2+\cdots+k+\sum_{i=1}^{k-1}g(i,1)=\frac{k(k+1)}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}g(i,1)
\end{aligned}$$

所以 $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}+\sum\limits_{i=1}^{n-1}g(i,1)$，$\forall g(n,m)\geqslant 0$.

经检验知 $f(x)$ 满足函数方程 ②.

说明 (1) 不难证明，本题结论可写成如下简洁的形式 $f(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}+\varphi(n)$，$\forall\varphi(n)\geqslant$



0 且对任意的 $m,n\in\mathbf{N}^+$，$\varphi(m+n)\geqslant\varphi(m)+\varphi(n)$.

前面五例设参函数都是加上一个任意函数的形式，实际上也可以是乘积型，还可以是指数型，对数型等，需视所给函数不等式的具体情况而定.

(2) 例 4、例 5 说明，取多元参函数很难保证变形过程的等价性，我们只能求出形式解.

例 6 设函数 $f(n)$ 定义在正整数集上，试解函数不等式 $f(n+1)\geqslant f(n)+\log_2\frac{n+1}{n}$.

解法 1 引入参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant 0,n\in\mathbf{N}^+)$，令 $f(n+1)=f(n)+\log_2\frac{n+1}{n}+g(n)$，下略.

解法 2 引入参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant\log_2\frac{n+1}{n},n\in\mathbf{N}^+)$，令 $f(n+1)=f(n)+g(n)$，下略.

解法 3 引入参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant\frac{n+1}{n},n\in\mathbf{N}^+)$，令 $f(n+1)=f(n)+\log_2 g(n)$，下略.

解法 4 令 $f(n)=\log_2[ng(n)]$，则函数不等式 $f(n+1)\geqslant f(n)+\log_2\frac{n+1}{n}$ 化为

$$\log_2[(n+1)g(n+1)]\geqslant\log_2[ng(n)]+\log_2\frac{n+1}{n}，即 g(n+1)\geqslant g(n)>0$$

因此，所给函数不等式的解是 $f(n)=\log_2[ng(n)]$，其中 $g(n+1)\geqslant g(n)>0,n\in\mathbf{N}^+$.

解法 5 将函数不等式 $f(n+1)\geqslant f(n)+\log_2\frac{n+1}{n}$ 化为

$$f(n+1)-\log_2(n+1)\geqslant f(n)-\log_2 n.$$

令 $g(n)=f(n)-\log_2 n$，则上式化为 $g(n+1)\geqslant g(n),n\in\mathbf{N}^+$.

故所给函数不等式的解是 $f(n)=g(n)+\log_2 n$，其中 $g(n+1)\geqslant g(n),n\in\mathbf{N}^+$.

评析 从本例可见，参函数的选取方法是多种多样的，不同的参函数影响着对应问题解决过程的繁与简. 参函数既可以在解决问题开始时选取，也可以在解决问题的过程中选取，还可以在解决问题结束时选取，要看所给问题的结构与求解方法而定. 选取的原则是：对参函数本身的限制尽量少，还要使问题易于解决，结果较为简明.

例 7 设函数 $f(n)$ 定义在正整数集上，试解函数不等式 $f(n+1)\geqslant a^n f(n)$，这里常数 $a>1$.

解 引入参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant n,n\in\mathbf{N}^+)$，令 $f(n+1)=a^{g(n)}f(n)$，则

$f(n)=a^{g(n-1)}f(n-1)=a^{g(n-1)}\cdot a^{g(n-2)}f(n-2)=\cdots=a^{g(n-1)}\cdot a^{g(n-2)}\cdots a^{g(1)}f(1)$，

所以 $f(n)=a^{g(n-1)+g(n-2)+\cdots+g(1)}f(1)$，其中 $\forall g(n)\geqslant n,n\in\mathbf{N}^+$.

例 8 解函数不等式 $f(\sin x)\leqslant\cos 2x$.

解 $f(\sin x)\leqslant\cos 2x$，即 $f(\sin x)\leqslant 1-2\sin^2 x$，其解为 $f(x)\leqslant 1-2x^2,x\in[-1,1]$.

评析 如果直接引入参函数 $p(x)(\forall p(x)\leqslant 0,x\in\mathbf{R})$，令 $f(\sin x)=\cos 2x+p(x)$，化为 $f(\sin x)=1-2\sin^2 x+p(x)$，就很难写出所求解.

顺便指出，这种引入参函数的方法，对于含有导数、微分的不等式也是适用的.



例 9 设 $f(x)$：$\mathbf{R}^- \to \mathbf{R}^+$，解函数不等式 $f'(x)(x-1)>0$.

解 引入参函数 $p(x)$（$\forall p(x)>0, x\in\mathbf{R}^-, x\neq 1$），令 $f'(x)(x-1)=p(x)$，则 $f'(x)=\dfrac{p(x)}{x-1}$，所以函数不等式的通解为 $f(x)=\int\dfrac{p(x)}{x-1}\mathrm{d}x$ （$p(x)>0, \forall x\in\mathbf{R}^-, x\neq 1$）.

2. 赋值法

对自变量多于一个的函数不等式，在定义域内，将其中一个或几个自变量用一些特殊值代入原函数不等式，从而简化函数不等式，达到求出未知函数的目的的方法，称为赋特值方法，简称赋值法. 这是解（或证）多变量函数不等式的一种行之有效的方法.

例 1 设 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f[x+f(y)]\geqslant f[f(x)+y]$ 且 $f(0)=0$，试确定所有这样的函数 f.

解 分别令 $x=0, y=0$，可得

$$f[f(y)]\geqslant f(y), f(x)\geqslant f[f(x)],$$

由此可得
$$f[f(x)]=f(x).$$

因 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，令 $f(x)\to x$，可得 $f(x)=x, x\in\mathbf{R}$.

经检验，$f(x)=x, x\in\mathbf{R}$ 是所给函数不等式的唯一解.

例 2 设 $f(x)$ 是在实数域上有定义的多项式函数，$f(0)=1$ 且对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，满足

$$f(x-y)+f(x)\geqslant(2x^2-2xy+y^2)+2x-y+2 \quad ①$$

试求 $f(x)$.

解 取 $y=x$ 代入式①，则可得

$$f(x-x)+f(x)=f(0)+f(x)\geqslant x^2+x+2,$$

即
$$1+f(x)\geqslant x^2+x+2$$

所以
$$f(x)\geqslant x^2+x+1, \forall x\in\mathbf{R}.$$

检验 $f(x-y)+f(x)\geqslant(x-y)^2+(x-y)+1+(x^2+x+1)=(2x^2-2xy+y^2)+2x-y+2$，所以 $f(x)\geqslant x^2+x+1$ 满足①.

例 3 设正值函数 $f(n)$ 是定义在正整数集上，试解函数不等式 $f(n)\geqslant qf(n-1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant 1$，$q>0$.

解法 1 令 $f(n)=f(n-1)g(n)$，$\forall g(n)\geqslant q$，则由递推关系式 $f(n)=f(n-1)g(n)$ 给出的数列 $\{f(n)\}$ 的通项公式可用“迭乘法”求出：分别令 $n=2,3,4,\cdots,n$，得

$$f(2)=f(1)g(2),$$
$$f(3)=f(2)g(3),$$
$$f(4)=f(3)g(4),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(n)=f(n-1)g(n).$$

将以上各式两边分别相乘，得 $f(n)=f(1)g(2)g(3)g(4)\cdots g(n)$，这里 $\forall g(n)\geqslant q$.

说明 如取 $g(n)=q, q\neq 1$ 时，得到等比数列 $f(1)=a\neq 0, f(n)=qf(n-1)$ 的通项



公式为 $f(n)=a\cdot q\cdot q\cdot q\cdots q=aq^{n-1}$.

解法 2 已知函数不等式可化为$\frac{f(n)}{q^n}\geqslant\frac{f(n-1)}{q^{n-1}}$,

$$令\ g(n)=\frac{f(n-1)}{q^{n-1}},则上式即\ g(n+1)\geqslant g(n).$$

所以所给函数不等式的解是 $f(n)=q^ng(n+1)$,其中 $g(n+1)\geqslant g(n)$, $n\in\mathbf{N}$

比较这两种解法,可知解法 2 的过程十分简洁,函数不等式的解的表达式也很简明,这正是我们要寻找的

例 4 设 $f(1)=1$, $f(2)=2$ 且满足

$$f(n+2)\geqslant 2f(n+1)-f(n),\forall n\in\mathbf{N}^+. \quad ①$$

试求 $f(n)$.

解 由 ① 式可知

$$f(n+2)-f(n+1)\geqslant f(n+1)-f(n).$$

根据 $f(1)=1$, $f(2)=2$,可推知 $f(n+1)-f(n)>0$, $n\in\mathbf{N}^+$.

于是可设

$$f(n+2)-f(n+1)=g(n)[f(n+1)-f(n)],\forall g(n)\geqslant 1$$

分别令 $n=1,2,3,\cdots,n-2$ 代入上式可得

$$f(3)-f(2)=g(1)[f(2)-f(1)],$$
$$f(4)-f(3)=g(2)[f(3)-f(2)],$$
$$\cdots$$
$$f(n)-f(n-1)=g(n-2)[f(n-1)-f(n-2)],$$

将这 $n-2$ 个等式相乘,可得

$$f(n)-f(n-1)=g(1)g(2)\cdots g(n-2)[f(2)-f(1)]$$
$$=g(1)g(2)\cdots g(n-2)(2-1),$$

$$f(n)-f(n-1)=g(1)g(2)\cdots g(n-2). \quad ②$$

再分别令 $n=2,3,4,\cdots,n$ 代入 ② 式,则可得到

$$f(2)-f(1)=1,$$
$$f(3)-f(2)=g(1),$$
$$f(4)-f(3)=g(1)g(2),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(n)-f(n-1)=g(1)g(2)\cdots g(n-2),$$

将此 $n-1$ 个等式相加,可得

$$f(n)-f(1)=1+g(1)+g(1)g(2)+\cdots+g(1)g(2)\cdots g(n-2),$$

$f(n)=2+g(1)+g(1)g(2)+\cdots+g(1)g(2)\cdots g(n-2)$, $\forall g(n)\geqslant 1, n\in\mathbf{N}^+$.

注 将自然数 n 分成为不计次序的若干自然数之和的一种表示方法,即



$$n=\sum_{i=1}^{m} n_i, n_1 \geqslant n_2 \geqslant n_3 \geqslant \cdots \geqslant n_m > 0.$$

称为n的一种分拆．所有不同分拆的个数记为分拆函数$f(n)$，可以证明，分拆函数是函数不等式①的一个特解．

从以上几例可见，赋值法对于多变量函数不等式比较适用，通过巧妙赋值，我们将其中部分的独立变量以特别的数值代入，不仅能把复杂的函数不等式转化为较简单的数学问题，收到奇效，还可以将一些抽象的推理问题转化为具体的数学运算问题，使问题数值化、直观化、简单化、特殊化，从而使问题得到很好的解决．

3．变量代换法

把函数不等式中的自变量适当地以别的自变量代换（代换时应注意使函数的定义域不会发生变化），得到一个新的函数不等式，然后设法求出未知函数的方法，称为变量代换法．

例1 试解函数不等式 $f(x-1) \leqslant x^2-2$．

解 设$t=x-1$，则$x=t+1$，代入函数不等式得$f(t) \leqslant (t+1)^2-2$，故所给函数不等式的解为$f(x) \leqslant x^2+2x-1$．

例2 已知$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，试求$f(x)$．

解 因为$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，题给函数不等式可化为$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，故所给函数不等式的解为$f(x)=x^2-2$，$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$．

例3 解函数不等式 $f(e^x) > x^2+\sin x$． ①

解 令$t=e^x$，则$x=\ln t$，$t>0$．将此代入①式可得

$$f(t) > (\ln t)^2+\sin(\ln t),$$

即 $f(x) > (\ln x)^2+\sin(\ln x)$，$\forall x>0$．

检验 回代入①式，易知其满足此函数不等式．

评析 检验所得到的解是否满足原来的函数不等式，是解函数不等式必不可少的一个步骤．上面一例用变量代换法解函数不等式，由于代换都是等价的，因此检验这一步骤可以略去．

例4 试求函数不等式 $f[f(x)] \geqslant \frac{x+1}{x+2}$ 的两个特解．

解 因$f[f(x)] \geqslant \frac{x+1}{x+2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x+1}}=\varphi[\varphi(x)]$，所以$f(x)=\frac{1}{1+x}$是所给函数不等式的一个解．

如果考虑$f(x)=\frac{2x+1}{x+3}$，则

$$f[f(x)]=\frac{2\cdot\frac{2x+1}{x+3}+1}{\frac{2x+1}{x+3}+3}=\frac{4x+2+x+3}{2x+1+3x+9}=\frac{x+1}{x+2},$$



所以 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ 也是所给函数不等式的一个解.

说明 在这个问题中，我们只能找到部分的解，因为此时 $\varphi(x)=f(x)$ 仍为未知函数，永远无法找到一个 $k\in\mathbf{N}$ 使得 $\varphi^k(x)=x$.

通常函数不等式 $f[f(x)]\geq g(x)$，其中 $g(x)$ 为已知函数，是很难找到它全部的解的.这种问题通常需对 $f(x)$ 作"适当的限制"才可能找到它全部的解.我们将在下面"待定函数法"中再介绍如何求这种函数不等式的解.

例 5 设 $f:[0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$，且满足

(1) $f(2)=0$.

(2) 当 $0<x<2$ 时，$f(x)\leqslant 0$.

(3) $\forall x,y>0$，满足函数不等式 $f[xf(y)]f(y)\leqslant f(x+y)$.

当 $x\in[0,2)$ 时，试求 $f(x)$.

解 (1) 当 $x>2$ 时，令 $x=t+2(t>0)$，则

$$f[tf(2)]f(2)\leqslant f(t+2)=f(x)$$

由 $f(2)=0$，知 $f(x)\geqslant 0(x\geqslant 2)$

(2) 当 $0\leqslant x<2$ 时，令 $x+t=2(t>0)$，则

$$0=f(2)=f(x+t)\geqslant f[tf(x)]f(x)$$

因为当 $0<x<2$ 时，$f(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)=0$ 或 $f[tf(x)]\geqslant 0$，可推知 $tf(x)\geqslant 2$ 即

$$f(x)\geqslant \frac{2}{t}=\frac{2}{2-x}$$

由于 $0\leqslant x<2$ 时，$\dfrac{2}{2-x}>0$，$f(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)\geqslant\dfrac{2}{2-x}$ 不成立，得函数不等式的解为 $f(x)=0$，$x\in[0,2)$.

评析 当所给的函数不等式含有较多的变量时，常常先将它化为一个变量的函数不等式，再利用不等式的证明技巧来处理这类问题.

4. 待定函数法

在解某些函数不等式时，若能预先确切地知道解的结构或一般形式，则适当地引进一些待定系数，利用它们来表示解函数的一般形式，然后再根据题设条件来确定或消去这些待定系数，求得问题的结果.这种解题方法就是待定函数法.应用待定函数法解题的一般步骤是(1)确定问题结论的结构，假定一个含有待定系数的函数式；(2)解方程组，求出待定系数的值或消去待定系数而得到所求已知系数间的关系，使问题获得解决.

应用待定函数法解题的必要前提，是正确判断解的形式结构，对此必须结合其他知识、其他方法综合考察.我们可先由函数不等式的结构预测函数不等式解的函数类型，再将函数代入不等式去确定它所包括的某些常数.

一般地，当我们知道解函数的类型(如有理函数、对数函数、指数函数……)及解函数的某些特征(如已知解函数在某些点的值或解函数的对称性、周期性……)时，用待定函数法来求



解较为简捷.

这一方法的基本思想是：如当 $f(x)$ 是多项式时，可设待定函数为 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq 0)$，代入函数不等式的两端，然后比较不等式两端 x 最高次幂的指数和 x 同次幂的系数，便可得出关于 n 及 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的约束条件，解这个约束条件(方程组或混合组)便可确定 n 及 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的值，从而得到函数不等式的解.

例 1 已知 $f(x)$ 为多项式函数，解函数不等式

$$f(x+1)+f(x-1)\leqslant 2x^2-4x. \qquad ①$$

解 因为 $f(x)$ 为多项式函数，而 $f(x+1)$ 与 $f(x-1)$ 并不会改变 $f(x)$ 的次数，故由①式可知 $f(x)$ 次数最高为二次函数，不妨设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则

$$f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+(a+b+c),$$

$$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2+(b-2a)x+(a-b+c),$$

原不等式化为

$$f(x+1)+f(x-1)=2ax^2+2bx+2(a+c)\leqslant 2x^2-4x,$$

即

$$(a-1)x^2+(b+2)x+(a+c)\leqslant 0,$$

$$\begin{cases}a-1=0,\\ b+2=0,\\ a+c\leqslant 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\ b=-2,\\ c\leqslant -1,\end{cases}$$

所以

$$f(x)=x^2-2x+c(c\leqslant -1),$$

或 $\begin{cases}a-1<0,\\ \Delta=(b+2)^2-4(a-1)(a+c)\leqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a<1,\\ c\leqslant\dfrac{(b+2)^2}{4(1-a)}-a.\end{cases}$

故所给函数不等式的解为 $f(x)=x^2-2x+c(c\leqslant -1)$ 或 $f(x)=ax^2+bx+c$，满足 $\begin{cases}a<1,\\ c\leqslant\dfrac{(b+2)^2}{4(1-a)}-a.\end{cases}$

检验 易知上面的解确实满足①式.

评析 当函数不等式中的未知函数是多项式时，一般可用此法得解.

在变量变换法中，我们曾提及在 $f[f(x)]\geqslant g(x)$($g(x)$ 为已知函数)的函数不等式，求解是不容易的，但若知道 $f(x)$ 的某些特性时，则可用待定函数法求解.我们来看下面例题.

例 2 求满足不等式 $f[f(x)]\geqslant x-3$，$x\in\mathbf{R}$ 的正比例函数 $f(x)$.

解 用待定函数法.设 $f(x)=ax$，$a\in\mathbf{R}$，则

$$f[f(x)]=af(x)=a^2x\geqslant x-3$$

对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，必须 $a^2=1$.所以题给函数不等式的解为 $f(x)=x$ 或 $f(x)=-x$.

例 3 求满足不等式 $f[f(x)]\geqslant 4$，$x\in(1,+\infty)$ 的指数函数 $f(x)$.

解 用待定函数法.设 $f(x)=a^x$，$a\in\mathbf{R}^+$，$a\neq 1$，则 $x\in(1,+\infty)$ 时总有



$$f[f(x)] = a^{a^{x}} = a^{a} \geqslant 4.$$

显然 $a>1$，此时 $x \geqslant \log_a\log_a 4$，只需 $\log_a\log_a 4 \leqslant 1$，可得 $a \geqslant 2$.

故题给函数不等式的指数函数解为 $f(x)=a^x, a\geqslant 2$

例 4 确定符合下列条件的所有多项式 $f(x)$.

$$f(x+1) \geqslant \frac{1}{2}f[f(x)] + \frac{3}{2} \qquad ①$$

解 若 $f(x)$ 是 n 次多项式函数，则 $f[f(x)]$ 是 n^2 次多项式函数，现 $n^2 \leqslant n$，所以 $f(x)$ 是一次多项式函数或常数函数

设 $f(x)=ax+b$，代入 ① 式得

$$a(x+1)+b \geqslant \frac{1}{2}[a(ax+b)+b]+\frac{3}{2},$$

即 $ax+a+b \geqslant \frac{1}{2}a^2x+\frac{1}{2}(a+1)b+\frac{3}{2}$，对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立.

等价于 $\begin{cases} a=\frac{1}{2}a^2 \\ a+b \geqslant \frac{1}{2}(a+1)b+\frac{3}{2} \end{cases}$，$\begin{cases} a=2 \\ b\leqslant 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=0 \\ b\geqslant 3 \end{cases}$

所以，欲求函数为 $f(x)=b, \forall b\geqslant 3$ 或 $f(x)=2x+b, \forall b\leqslant 1$

例 5 已知 $f(x)$ 是 x 的奇次多项式函数，且对任意实数 x 满足

$$8f(x^3)-x^6f(2x)-2f(x)\leqslant 12. \qquad ①$$

试求 $f(x)$ 的一个解

解 从条件可以看出，不等式右边是一个常数项，设 $f(x)$ 的最高次项为 $a_nx^n(a_n\neq 0)$，则 $8f(x^3)$，$x^6f(2x)$，$2f(x)$ 的最高次项分别为 $8a_nx^{3n}$，$2^na_nx^{n+6}$，$2a_nx^n$，次数为 $3n$，$n+6$，n，① 式左边展开后的最高次项为 $3n$，是奇数，必须有

$$\begin{cases} 3n=n+6, \\ 8a_n-2^na_n=0. \end{cases}$$

解得 $n=3$（不然的话，若展开式最高次项为奇数，由于 x 是任意实数，不能使 ① 式恒成立）

于是可设 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，

将 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 代入 ① 中，并整理得

$$-4a_2x^8-2a_1x^7+(8a_2+2-2a_1)x^6-2a_1x^5+8a_1x^4-2a_1x^3+6a_0\leqslant 12.$$

令 $x=0$，得 $8a_0-2a_0\leqslant 12$，得 $a_0\leqslant 2$.

由于只要求一个解，我们令

$$\begin{cases} -4a_2x^8-2a_1x^7+(8a_2+2-2a_1)x^6-2a_1x^5+8a_1x^4-2a_1x^3=0, \\ 6a_0\leqslant 12, \end{cases}$$



根据多项式恒等定理，等价于 $\begin{cases}1-4a_2=0,\\ 2a_1=0,\\ 8a_3+2-2a_1=0.\end{cases}$

解得 $a_1=a_2=0, a_3=1$，所以题给函数不等式的一个解为 $f(x)=x^3+a_0$，其中实数 $a_0\leqslant 2$

5. 迭代法

设函数 $y=f(x)$，记 $f^{(n)}(x)=\underbrace{ff\cdots f}_{n}(x)$，其中 n 是正整数，$f^{(n)}(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的 n 次迭代．若 $f^{(n)}(x)=x$，则称函数 $f(x)$ 的迭代周期为 n.

函数迭代是一种特殊的函数复合形式，在现代数学中占有很重要的地位，尤其是近年来在国内外数学竞赛中屡次出现，成为热点问题之一，引起了广大数学爱好者的极大关注.

例1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，且 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)\geqslant 1+x$，试解此函数不等式.

解 注意到 $\frac{x-1}{x}\neq 1$，所以题给函数不等式的解在 $x=1$ 处没有约束.

令 $\varphi(x)=\frac{x-1}{x}$，则 $\varphi^{(2)}(x)=\frac{1}{1-x}$，$\varphi^{(3)}(x)=x$，再取 $\forall p(x)\geqslant 0$，并令

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x+p(x). \quad ①$$

作替换 $\varphi(x)\to x$，得

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2x-1}{x}+p\left(\frac{x-1}{x}\right). \quad ②$$

再作替换 $\varphi^{(2)}(x)\to x$，得

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2-x}{1-x}+p\left(\frac{1}{1-x}\right). \quad ③$$

①＋③－② 得

$$2f(x)=1+x+\frac{2-x}{1-x}-\frac{2x-1}{x}+p(x)+p\left(\frac{1}{1-x}\right)-p\left(\frac{x-1}{x}\right),$$

从而 $f(x)=\frac{1+x^2-x^3}{2x(1-x)}+\frac{1}{2}\left[p(x)+p\left(\frac{1}{1-x}\right)-p\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]$，其中 $\forall p(x)\geqslant 0, x\neq 0,1$

取 $p(x)=0, x\in(0,1)$，得到相应的函数方程

$$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1+x$$

的解为 $f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}$，$\forall x\in\mathbf{R}-\{0,1\}$.

检验 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)}+\frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)^3-\left(\frac{x-1}{x}\right)^2-1}{2\,\frac{x-1}{x}\left(\frac{x-1}{x}-1\right)}=x+1$



所以 $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)},\forall x\in\mathbf{R}\setminus\{0,1\}$.

评析 一般地，对于函数 $k(x)$ 不等式 $f(x)+f[\varphi(x)]\geqslant k(x)$，只要 $\varphi(x)$ 具有周期3，就能求出其解

$$f(x)=\frac{1}{2}\{k(x)-k[\varphi(x)]+k[\varphi^{-1}(x)]+p(x)-p[\varphi(x)]-p[\varphi^{-1}(x)]\},\forall p(x)\geqslant 0,$$

或 $f(x)=\dfrac{1}{2}\{p(x)-p[\varphi(x)]+p[\varphi^{-1}(x)]\},\forall p(x)\geqslant k(x)$

约束条件由具体情况确定

特别需要指出的是，用迭代法求出的结果有时只是所给函数不等式的一个特解. 下面用两个例子来加以说明

例2 已知函数不等式

$$f(x^2)-f(x)\geqslant 1, \qquad ①$$

试求连续函数 $f(x)$，其中 $f(x)$ 的定义域是 $(1,+\infty)$.

解 构造数列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_0,x_1=x_0^2,x_2=x_1^2,\cdots,x=x_n=x_{n-1}^2,$$

将它们代入所给函数不等式，得

$$f(x_1)-f(x_0)\geqslant 1,f(x_2)-f(x_1)\geqslant 1,\cdots,f(x)-f(x_{n-1})\geqslant 1,$$

将这些不等式相加，得 $f(x)-f(x_0)\geqslant n$.

因为 $x=x_0^{2^n}$，所以 $\log_2\log_2 x-\log_2\log_2 x_0=n$,

因此 $f(x)\geqslant f(x_0)+\log_2\log_2 x-\log_2\log_2 x_0$.

令 $c=f(x_0)-\log_2\log_2 x_0$，那么 $f(x)\geqslant\log_2\log_2 x+c$. 容易验证一个特解 $f(x)=\log_2\log_2 x+c$.

剖析 这里用迭代法求出的解 $f(x)=\log_2\log_2 x+c$ 只是函数不等式①的一个特解，容易验证

$$f(x)=\log_2\log_2 x+\sin(2\pi\log_2\log_2 x)$$

也是函数不等式①的一个特解

证 $f(x^2)=\log_2\log_2 x^2+\sin(2\pi\log_2\log_2 x^2)$

$=\log_2(2\log_2 x)+\sin 2\pi\log_2(2\log_2 x)$

$=1+\log_2\log_2 x+\sin 2\pi(1+\log_2\log_2 x)$

$=1+\log_2\log_2 x+\sin(2\pi\log_2\log_2 x)$

$=1+f(x)$.

所以 $f(x^2)-f(x)=1$，故 $f(x)=\log_2\log_2 x+\sin(2\pi\log_2\log_2 x)$ 也是函数不等式①的一个特解

两个特解的结构启示我们可用代换法尝试求出函数不等式①的一个通解



解 令 $f(x)=g(\log_2\log_3 x)$，则函数不等式①化为

$$g(\log_2\log_3 x+1)-g(\log_2\log_3 x)\geqslant 1.$$

再令 $t=\log_2\log_3 x$，由于 $f(x)$ 的定义域是 $(1,+\infty)$，故 $t\in\mathbf{R}$，上式可化为

$$g(t+1)-g(t)\geqslant 1.$$

即 $g(t+1)-(t+1)\geqslant g(t)-t$。设 $h(t)=g(t)-t$，则 $h(t+1)\geqslant h(t)$，逐步回代，$g(t)=h(t)+t$，原函数不等式①的通解为

$$f(x)=g(\log_2\log_3 x)=h(\log_2\log_3 x)+\log_2\log_3 x.$$

其中 $h(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上满足 $h(x+1)\geqslant h(x)$ 的任何函数。

说明 对于形如 $f(x^r)-f(x^s)\geqslant 1$ 的函数不等式，可类似求出其通解。

例 3 已知函数不等式

$$f(x+p)-qf(x)\geqslant ax+b, \qquad ①$$

试求 $f(x)$，其中 p,q,a,b 为常数，且 $q\neq 1$。

通常用迭代法求出①式相应函数方程的解是

$$f(x)=\frac{ax}{1-q}+cq^{\frac{x}{p}}+\frac{b}{1-q}-\frac{ap}{(1-q)^2}.$$

在一定条件下这一答案给出了函数不等式①的一个特解，而一般情况下这一答案可能无意义，如 $p=0,c\neq 0$ 时函数不等式①的解为 $f(x)=\frac{ax+b}{1-q}$。

下面用分类讨论法求解函数不等式①。

解 当 $p=0$ 时，由①立即得到函数不等式的解为

$$f(x)\geqslant\frac{ax+b}{1-q}(q<1)\text{ 或 }f(x)\leqslant\frac{ax+b}{1-q}(q>1).$$

当 $p\neq 0$ 时，令 $f(x)=g(x)+\lambda x+\mu$，这里 $g(x)$ 是待定函数，λ,μ 是待定常数，代入函数不等式①中，得

$$g(x+p)+\lambda(x+p)+\mu-q[g(x)+\lambda x+\mu]\geqslant ax+b,$$

即
$$g(x+p)-qg(x)+(\lambda-\lambda q-a)x+\lambda p+\mu-q\mu-b\geqslant 0.$$

令 $\lambda-\lambda q-a=0,\lambda p+\mu-q\mu-b=0$，得

$$\lambda=\frac{a}{1-q},\mu=\frac{b}{1-q}-\frac{ap}{(1-q)^2},$$

而 $g(x+p)\geqslant qg(x)$。 ②

当 $q>0$ 时，②式等价于

$$\frac{g(x+p)}{(q^{\frac{1}{p}})^{x+p}}\geqslant\frac{g(x)}{(q^{\frac{1}{p}})^x}，令 h(x)=\frac{g(x)}{(q^{\frac{1}{p}})^x},$$

则 $g(x)=h(x)q^{\frac{x}{p}}$，上式化为 $h(x+p)\geqslant h(x)$，逐步回代，函数不等式①此时的通解为



$$f(x)=\frac{ar}{1-q}+h(x)q^{\frac{x}{p}}+\frac{b}{1-q}-\frac{ap}{(1-q)^{2}},x\in D.$$

其中 $h(x)$ 是定义在实数集 $D(\subseteq\mathbb{R})$ 上满足 $h(x+p)\geqslant h(x)$ 的任一函数.

当 $q<0$ 时,(2)式等价于

$$\frac{g(x+p)}{[(-q)^{\frac{1}{p}}]^{x+p}}\geqslant-\frac{g(x)}{[(-q)^{\frac{1}{p}}]^{x}},\text{令 } h(x)=\frac{g(x)}{[(-q)^{\frac{1}{p}}]^{x}},$$

则 $g(x)=h(x)(-q)^{\frac{x}{p}}$,上式化为 $h(x+p)\geqslant-h(x)$,逐步回代,函数不等式①此时的通解为

$$f(x)=\frac{ax}{1-q}+h(x)(-q)^{\frac{x}{p}}+\frac{b}{1-q}-\frac{ap}{(1-q)^{2}},x\in D.$$

其中 $h(x)$ 是定义在实数集 $D(\subseteq\mathbb{R})$ 上满足 $h(x+p)\geqslant-h(x)$ 的任一函数.

6. 分离法

当多变量函数不等式中变量容易分离时,往往先考虑分离法,它能使解题过程简洁.

例1 求所有满足

$$f(x)+f(y)+g(x)-g(y)\geqslant\sin x+\cos y,x,y\in\mathbb{R}$$

的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$.

解 分离函数,将含有 x,y 的部分分离在不等式两边,

$$f(x)+g(x)-\sin x\geqslant g(y)-f(y)+\cos y,$$

引入参函数 $p(x)$,$q(y)$,$x,y\in\mathbb{R}$,令

$$p(x)=f(x)+g(x)-\sin x,q(y)=g(y)-f(y)+\cos y,\tag{①}$$

其中 $p(x)\geqslant q(y)$,$\forall x,y\in\mathbb{R}$.

式①中令 $y=x$,两式相加减,得

$$f(x)=\frac{1}{2}[\sin x+\cos x+p(x)-q(x)],g(x)=\frac{1}{2}[\sin x-\cos x+p(x)+q(x)],$$

其中 $p(x)\geqslant q(y)$,$\forall x,y\in\mathbb{R}$.

评析 当所给的函数不等式中含有两个不同的变量时,先作变换再引入参函数,可以使问题变得简单一些后,再求函数的解析式.

例2 设 $f(x)$ 定义在$[0,+\infty)$上,且满足函数不等式:

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)\geqslant 4xy(x^{2}-y^{2}),$$

试求出所有这样的函数 $f(x)$.

解 不妨设 $x>y$,则题给不等式可等价转化为

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}\geqslant 4xy,\tag{①}$$

令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$,不等式①等价转化为 $g(x+y)-g(x-y)\geqslant 4xy$



设 $u=x+y$，$v=x-y$，则 $u\geqslant v$，上式等价转化为 $g(u)-g(v)\geqslant u^2-v^2$，即

$$g(u)-u^2\geqslant g(v)-v^2.$$

再令 $h(u)=g(u)-u^2$，则 $h(u)\geqslant h(v)$。递推上去，可得函数不等式的通解

$$f(x)=x^2+xh(x),x\in[0,+\infty).$$

其中 $h(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的单调递增函数。

7 归纳递推法

这一方法的基本思想是：当 $f(x)$ 是定义在正整数集上的函数（实际上就是通项为 $a_n=f(n)$ 的数列）时，可根据题中所给函数不等式转化为函数方程，通过取特殊值得到关于 $f(n)$ 的递推关系，然后根据递推关系求出（即数列 $\{a_n\}$ 的通项表达式）。

递推法主要适合定义域是正整数集上的函数不等式。一般通过对 $f(1),f(2),f(3),\cdots$ 的具体计算，归纳出与 $f(n)$ 有关的猜想，然后用数学归纳法加以证明。

例 1 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^+$ 上的不恒为零的函数，且对于任意的 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 都满足 $f(x)\neq0$，$f(a\cdot b)\geqslant af(b)+bf(a)$。试判断 $f(a^n)$ 与 $f(a)$ 的关系。

解法 1 由

$$f(a^2)\geqslant af(a)+af(a)=2af(a),$$

$$f(a^3)\geqslant a^2f(a)+af(a^2)\geqslant 3a^2f(a),$$

猜测 $f(a^n)\geqslant na^{n-1}f(a)$。

下面用数学归纳法证明。

1．当 $n=1$ 时，$f(a^1)\geqslant 1\cdot a^0\cdot f(a)$，不等式成立；

2．假设当 $n=k$ 时，不等式 $f(a^k)\geqslant ka^{k-1}f(a)$ 成立，

那么当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}f(a^{k+1})&\geqslant a^kf(a)+af(a^k)\\&\geqslant a^kf(a)+ka^kf(a)\\&=(k+1)a^kf(a)，仍成立.\end{aligned}$$

由以上两步可知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$f(a^n)\geqslant na^{n-1}f(a)$ 成立。

解法 2 当 $ab\neq0$ 时，$\dfrac{f(a\cdot b)}{ab}\geqslant\dfrac{f(b)}{b}+\dfrac{f(a)}{a}$，

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$，则 $g(a\cdot b)\geqslant g(a)+g(b)$，

故 $g(a^n)\geqslant ng(a)$，所以 $f(a^n)\geqslant a^n\cdot g(a^n)\geqslant na^ng(a)=na^{n-1}f(a)$。

例 2 设函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，$f(1)=1$，试解函数不等式 $f(n+1)\geqslant f(n)+2^n$，$n\in\mathbf{N}^*$。

解法 1 引入参函数 $p(n)$（$p(n)\geqslant0$，$n\in\mathbf{N}^*$），令

$$f(n+1)=f(n)+2^n+p(n),$$

$$\begin{aligned}f(n)&=[f(n)-f(n-1)]+[f(n-1)-f(n-2)]+\cdots+[f(2)-f(1)]+f(1)\\&=[2^{n-1}+p(n-1)]+[2^{n-2}+p(n-2)]+\cdots+[1+p(1)]+1,\end{aligned}$$



所以原函数不等式的解为 $f(n)=2^n+\sum p(i)$，其中 $\forall p(n)\geq 0, n\in\mathbf{N}$.

解法2 $f(n+1)\geq f(n)+2^n$ 可变为 $f(n+1)-2^{n+1}\geq f(n)-2^n$，令 $g(n)=f(n)-2^n$，得 $g(n+1)\geq g(n)$. 所以题给不等式的解为 $f(n)=2^n+g(n)$，其中 $g(n+1)\geq g(n), n\in\mathbf{N}$.

例3 设函数 f 对一切正整数 n 都有定义，$f(n)$ 皆为正整数，且有 $f(n+1)>f[f(n)]$，证明：对一切正整数 n，都有 $f(n)=n$.

证 先证明一个较弱的命题：

若正整数 $m\geq n$，则有 $f(m)\geq n$. ①

对 n 使用数学归纳法：

当 $n=1$ 时，因为 $f(m)$ 是正整数，所以 $f(m)\geq 1$，命题①成立.

假设当 $n=k(k\geq 1)$ 时，命题①成立.

那么，当 $n=k+1$ 时，由 $m\geq k+1$ 得 $m-1\geq k$，应用归纳假设有 $f(m-1)\geq k$. 注意到 $f(m-1)$ 也是一个正整数，于是再次应用归纳假设，有 $f[f(m-1)]\geq k$，结合题目条件，即得

$$f(m)=f[(m-1)+1]>f[f(m-1)]\geq k.$$

既然 $f(m)$ 是大于 k 的正整数，当然就有 $f(m)\geq k+1$.

所以，当 $n=k+1$ 时，命题①也成立.

这样，对一切正整数 n，命题①都成立.

下面证：对一切正整数 n，都有 $f(n)=n$.

在命题①中，取 $m=n$，即得

$$f(n)\geq n.$$

结合题目条件和不等式 $f(n)\geq n$，有

$$f(n+1)>f[f(n)]\geq f(n).$$

这表明了 f 严格单调递增，且由 $f(n)<n+1$，与 $f(n)\geq n$ 联立，即得

$$n\leq f(n)<n+1.$$

由于 $f(n)$ 是正整数，故必有 $f(n)=n$.

注 本题先证明一个较原命题为弱的命题，然后以此为基础再去解决命题，从而起到降低难度、分散难点的作用. 这是一种退中求进的解题策略.

8. 算不等式法

一维空间高（低）调函数定义 设 $D(\subseteq\mathbf{R})$，a 是一个常数.

若对任意的 $x\in D$，都有 $f(x+a)\geq f(x)$，则称函数 $f(x)(x\in D)$ 关于 a 是高调的，或称 $f(x)(x\in D)$ 是 a 的高调函数；若对任意的 $x\in D$，都有 $f(x+a)\leq f(x)$，则称函数 $f(x)(x\in D)$ 关于 a 是低调的，或称 $f(x)(x\in D)$ 是 a 的低调函数.

当等号不成立时，则称函数 $f(x)(x\in D)$ 关于 a 是严格高（低）调的，或称 $f(x)(x\in D$



是 a 的严格高(低)调函数.

高(低)调函数是广泛存在的,如

取 D 上周期函数 $g(x)(=g(x+a))$ 和 D 上的(严格)增(减)函数 $h(x)$,则

$f(x)=g(x)+h(x), x\in D$

关于 a 是(严格)高(低)调函数.

高(低)调函数可作为高维空间的函数不等式的基本不等式,详见附录.

例 1 解函数不等式 $f(x)\geqslant f\left(\frac{x}{1-x}\right)$.

解 令 $p(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$,则 $f(x)\geqslant f\left(\frac{x}{1-x}\right)$,即 $p(x)\geqslant p(x-1)$.所以函数不等式的通解是 $f(x)=p\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0,1$,这里 $p(x), x\neq 0,1$ 是关于 (-1) 的低调函数.

例 2 若 $\varphi_k(x)=x, k\in \mathbf{N}^*$,则函数不等式 $f(x+\lambda)\geqslant \varphi[f(x)]$ 的解函数一定是高调函数.

证 $f(x+k\lambda)=f[x+(k-1)\lambda+\lambda]\geqslant \varphi\{f[x+(k-1)\lambda]\}$

$\geqslant \varphi\{\varphi(f[x+(k-2)\lambda])\}\geqslant\cdots\geqslant \varphi_k[f(x)]=f(x)$.

在上面迭代法例2、例3中,我们是用基本不等式来表示函数不等式的解的,只不过没有说是基本不等式而已.

9. 两边夹法

利用不等式夹逼求解函数不等式,主要是利用下列几个明显的结论:

(1) 若对任意 $x\in I$,有 $f(x)\geqslant g(x)$ 及 $f(x)\leqslant g(x)$,则对任意 $x\in I$,有 $f(x)=g(x)$.

(2) 若对任意 $x,y\in I$,有 $f(x)\leqslant g(y)$,则交换 x,y 得 $f(y)\leqslant g(x)$,于是对任意的 $x,y\in I$,有 $f(x)=g(y)$,由此可得 $f(x)=$ 常数 $(x\in I)$.

(3) 若 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$ 满足 $m\leqslant f(n)<m+1$ 或 $m-1<f(n)\leqslant m$ 或 $m-1<f(n)<m+1\ (m,n\in\mathbf{N}^*)$,则 $f(n)=m$.

例 1 (2009年全国高中数学联赛第一试试题改编)已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,$f(1)=1$,且对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+5)\geqslant f(x)+5$,$f(x+1)\leqslant f(x)+1$,若 $g(x)=f(x)+1-x$,则 $g(2009)=$______.

解 由 $g(x)=f(x)+1-x$,得 $f(x)=g(x)+x-1$,所以

$$g(x+5)+(x+5)-1\geqslant g(x)+(x-1)+5,$$
$$g(x+1)+(x+1)-1\leqslant g(x)+(x-1)+1,$$

即 $g(x+5)\geqslant g(x), g(x+1)\leqslant g(x)$,

所以 $g(x)\leqslant g(x+5)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x+1)\leqslant g(x)$,

所以 $g(x+1)=g(x)$,

即 $g(x)$ 是以1为周期的周期函数.又 $g(1)=1$,故 $g(2009)=1$.

例 2 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足:$f(2+x)=2-f(x)$,$f(x+3)\geqslant f(x)$,试求 $f(x)$



解 因为 $f(x+3)=f[2+(x+1)]=2-f(x+1)\geqslant f(x)$，所以

$$f(x)+f(x+1)\leqslant 2. \quad ①$$

又 $f(x)=2-f(2+x)$，代入 $f(x+3)\geqslant f(x)$ 中，得

$f(x+3)\geqslant 2-f(x+2)$，即 $f(x+3)+f(x+2)\geqslant 2$，用 $x-2$ 替换 x，得

$$f(x)+f(x+1)\geqslant 2. \quad ②$$

由①、②式得 $f(x)+f(x+1)=2$，与已知的 $f(x)=2-f(2+x)$ 比较，得 $f(x+1)=f(2+x)$，用 $x-1$ 替换 x，得 $f(x)=f(1+x)$，所以

$f(x)=2-f(2+x)=2-f(1+x)=2-f(x)$，解得 $f(x)=1$.

例 3 设 $f(x)$ 是具有如下性质的函数

(1) $f(n)$ 对每个正整数 n 有定义；

(2) $f(n)$ 是正整数；

(3) $f(2)=2$；

(4) $f(mn)\leqslant f(m)f(n)$，对一切 m,n 成立；

(5) $f(m)>f(n)$，当 $m>n$ 时.

试证：$f(n)=n$.

证明 考虑正整数 $n=1$，由(5)函数 $f(x)$ 的严格递增性知，$f(2)=2>f(1)$.

由(2)知，$f(1)\in\mathbf{N}^*$，故 $f(1)=1$.

由(4)知 $f(4)\leqslant f(2)f(2)=4$，由(5)知 $f(2)<f(3)<f(4)\leqslant 4$.

已知 $f(2)=2$，$f(3)$、$f(4)\in\mathbf{N}^*$，所以 $f(3)=3$，$f(4)=4$.

下面用数学归纳法证明：$n\leqslant 2^k$ 时，$f(n)=n\ (k=1,2,\cdots)$.

当 $k=1,2$ 时，上面已证.

假设 $n\leqslant 2^k$ 时，$f(n)=n$，则当 $n\leqslant 2^{k+1}$ 时，由(4)知

$$f(2^{k+1})=f(2\times 2^k)\leqslant f(2)\cdot f(2^k)=2^{k+1}.$$

再考虑自然数 n：$2^k<n<2^{k+1}$，由(5)有

$$2^k=f(2^k)<f(2^k+1)<f(2^k+2)<\cdots<f(2^{k+1}-1)<f(2^{k+1})=2^{k+1}.$$

故必有 $f(2^k+1)=2^k+1$，$f(2^k+2)=2^k+2$，…，

$$f(2^{k+1}-1)=2^{k+1}-1.$$

可见 $n\leqslant 2^{k+1}$ 时，也有 $f(n)=n$.

综上所述，对任何正整数 n，都有 $f(n)=n$.

10. 反面思考法

反面思考是一种间接的解题策略. 当我们面临的问题从正面难以入手时，要及时改变思考问题的角度，不妨从问题的反面进行思考，以便化难为易解出原题. 反面思考从习惯思路相反的方向去思考问题和分析问题，常用的途径有：顺推有困难时，可以考虑逆推；直接求解有困难时，可以考虑间接求解；直接证明有困难时，可以考虑间接证明；肯定命题有困难时，



可以考虑否定命题．反证法是一种特殊的反面思考方法

例1 （第一届"希望杯"高二年级第2试第3题）f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 上的一一映射，函数 $y=f(x)$ 严格递增，不等式 $x>f(x)$ 的解集为 P，不等式 $x>f[f(x)]$ 的解集为 Q，则 （ ）

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $P=Q$　　C. $Q\subsetneqq P$　　D. $P\subsetneqq Q$ 且 $Q\subsetneqq P$

解 任取 $x_0\in P$，$x_0>f(x_0)$，有 $x_0>f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in Q$．这表明 $P\subseteq Q$．另一方面，任取 $y_0\in Q$，则 $y_0>f[f(y_0)]$．下面用反证法证明 $y_0>f(y_0)$．

假设 $y_0\leqslant f(y_0)$，由于函数 $y=f(x)$ 是严格递增的，则有 $f(y_0)\leqslant f[f(y_0)]<y_0$，但这与所设 $y_0\leqslant f(y_0)$ 矛盾！

可见只有 $y_0>f(y_0)$，这表明 $y_0\in P$，即又有 $Q\subseteq P$．

由 $P\subseteq Q$，且 $Q\subseteq P$，知 $P=Q$．选(B)．

评析 要判断集合 P 与集合 Q 之间的关系，必须用集合的定义进行证明．本题求解的关键是由 $y_0>f[f(y_0)]$，猜测出 $y_0>f(y_0)$，然后用反证法、分类讨论等数学思想方法进行求解．

注意到本题是一个选择题，因此也可利用求解选择题的特殊化技巧，排除错误的选择支．

解 取特殊函数，令 $f(x)=2x$，则 $f[f(x)]=4x$，不等式 $x>f(x)$ 的解集 P 和 $x>f[f(x)]$ 的解集 Q 相等，于是 $P=Q$，排除A、C、D．选B．

本题的结果太奇妙了！自然会启发我们思考如下一些问题：

(1) 题设条件"f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 上的一一映射，函数 $y=f(x)$ 严格递增"可以减弱吗？当函数 $y=f(x)$ 不是严格递增时，结论还成立吗？

答案是否定的．请看：

反例 当 $f(x)=x^2-2$ 时，$f(x)<x$ 即 $x^2-2<x$，$P=(-1,2)$；$f[f(x)]<x$，即 $(x^2-2)^2-2<x$，先求解相应的方程 $(x^2-2)^2-2=x$ 可用换元法，转化为方程组来解．

设 $y=x^2-2$，则 $\begin{cases}y=x^2-2\\x=y^2-2\end{cases}$，可求得解集为 $\left\{-1,2,\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$，于是 $Q=\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2},-1\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2},2\right)$，因此 $P\neq Q$．

(2) 拓展 "不等式 $x>f[f(x)]$ 的解集为 Q" 改为一般形式"不等式 $x>f\{f\cdots[f(x)]\}$（n 个 f）的解集为 Q"，结论不变．

(3) 延伸 将条件改为"不等式 $x\geqslant f(x)$ 的解集为 P，不等式 $x\geqslant f[f(x)]$ 的解集为 Q"，结论不变，仍成立 $P=Q$．只要将上述证明过程修改即可．

证明 任取 $x_0\in P$，$x_0\geqslant f(x_0)$，有 $x_0\geqslant f(x_0)\geqslant f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in Q$．这表明 $P\subseteq Q$．另一方面，任取 $y_0\in Q$，则 $y_0\geqslant f[f(y_0)]$．下面用反证法证明 $y_0\geqslant f(y_0)$．

假设 $y_0<f(y_0)$，由于函数 $y=f(x)$ 是严格递增的，则有 $y_0<f(y_0)<f[f(y_0)]$，但这与题设 $y_0\geqslant f[f(y_0)]$ 矛盾！可见 $y_0\geqslant f(y_0)$，这表明 $y_0\in P$，即又有 $Q\subseteq P$．

由 $P\subseteq Q$，且 $Q\subseteq P$，知 $P=Q$．



还可将它拓展到 n 个 f 的情形，留给读者自行解决.

(4) 本题及(2)、(3)中的结论可作为小定理在解题中应用，如：

① 解不等式：$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}<x$；

② 解不等式 $(x^2-6)^2-6<x$；

③ 当 $f(x)$ 是增函数时，混合组 $\begin{cases} f(x)>g(x), \\ f^{-1}(x)=g(x) \end{cases}$ 与 $g(x)>x$ 同解.

本题的结果真的太奇妙了！

(5) 设 $f(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)^2-2$，$x\in[-2,+\infty)$，则不等式 $f(x)\geqslant f^{-1}(x)$ 的解集是

类似可得：不等式 $f(x)>f^{-1}(x)$ 与 $f(x)>x$ 的解集同为 $[-2,2]$.

例 2 （第　届“希望杯”高一年级第 2 试第 23 题）函数 $y=f(x)$ 中的 x 与 $f(x)$ 都是正整数，并且对于任意的正整数 x，都有

$$f(x)+f(x+2)\leqslant 2f(x+1),\ f(x)<2000.$$

求证：存在正整数 m，使得当 $x\geqslant m$ 时，$f(x)$ 是常数.

解 (1) 假设存在正整数 t，使 $f(t)>f(t+1)$，那么 $f(t+2)\leqslant 2f(t+1)-f(t)<f(t+1)$.

同理可得

$$f(t)>f(t+1)>\cdots>f(t+n)>\cdots.$$

因为对于任意的 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\in\mathbf{N}^*$，所以

$$f(t)\geqslant f(t+1)+1\geqslant f(t+2)+2\geqslant\cdots\geqslant f(t+n)+n\geqslant\cdots$$

设 $f(t)=k$，则 $k=f(t)\geqslant f(t+k)+k$，得 $f(t+k)\leqslant 0$，这与 $f(x)\in\mathbf{N}^*$ 矛盾，所以假设不成立，即对于任意 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\leqslant f(x+1)$.

(2) 如果对于任意的 $x\in\mathbf{N}^*$，都有 $f(x)\neq f(x+1)$，那么由(1)可知

$$f(1)<f(2)<\cdots<f(n)<\cdots,$$
$$f(1)\leqslant f(2)-1\leqslant\cdots\leqslant f(n)-n+1\leqslant\cdots,$$

又 $f(1)\in\mathbf{N}^*$，所以 $f(2000)\geqslant f(1)+1999\geqslant 2000$，这与已知的 $f(x)<2000$ 矛盾. 因此总存在 $m\in\mathbf{N}^*$，使 $f(m)=f(m+1)$.

由已知 $f(m+2)\leqslant 2f(m+1)-f(m)=f(m+1)$，而(1)中已证明 $f(m+2)\geqslant f(m+1)$，从而

$$f(m+1)=f(m+2)=f(m+3)=f(m+4)=f(m+5)=\cdots,$$

故对于 $x\geqslant m$ 时，$f(x)=f(m)$ 是常数.

评析 要证明当 $x\geqslant m$ 时，$f(x)$ 是常数. 这里进行反面思考：从否定 $f(x)$ 不是常数入手，否定假设存在正整数 t，使 $f(t)>f(t+1)$，从而有 $f(t)\leqslant f(t+1)$，进而导出与已知矛盾



的结论，使问题顺利得解。

例 3 （第 31 届俄罗斯数学奥林匹克竞赛题，2005 年）是否存在有界函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，使得 $f(1) > 0$，且对一切的 $x, y \in \mathbf{R}$，都有 $f^2(x+y) \geqslant f^2(x) + 2f(xy) + f^2(y)$ 成立？

解 不存在．任取 $x_1 \neq 0$，令 $y_1 = \frac{1}{x_1}$，有

$$f^2(x_1 + y_1) \geqslant f^2(x_1) + 2f(1) + f^2(y_1) \geqslant f^2(x_1) + a，其中 a = 2f(1) > 0$$

令 $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$，$y_n = \frac{1}{x_n}$，$n \geqslant 2$。

于是有
$$\begin{aligned} f^2(x_n + y_n) &\geqslant f^2(x_n) + a = f^2(x_{n-1} + y_{n-1}) + a \\ &\geqslant f^2(x_{n-1}) + 2a \geqslant \cdots \geqslant f^2(x_1) + na. \end{aligned}$$

故数列 $\{f(x_n)\}$ 不是有界的，与条件矛盾．

注 去掉条件"$f(x)$ 是有界函数"，有明显的一个解 $f(x) = x$，是否还有其他解，值得我们进一步探索．

11．构造法

根据函数不等式的结构特点，直接构造出适合所给函数不等式的未知函数．

例 1 是否存在函数 $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$，使对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $n^2 - 1 < f[f(n)] < n^2 + 2$．

分析 如果能构造出函数 $f[f(n)] = n^2$ 或 $n^2 + 1$，问题就获得解决了．

解 设数列 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \cdots$，依次递增且取遍所有不是整数平方的正整数，令 $a_{k,m} = (a_k)^{2^m}$，其中 $k \in \mathbf{N}^*$，$m \in \mathbf{N}$，则有 $a_{k,m+1} = (a_{k,m})^2$，且对每个正整数 n，都对应唯一的对数 (k, m)，使得 $n = a_{k,m}$．

构造函数 $f(n)$ 如下：

$$f(1) = 1, f(a_{k,m}) = \begin{cases} a_{k+1,m}，当 k 是奇数时， \\ a_{k-1,m+1}，当 k 是偶数时， \end{cases}$$

其中 $k \in \mathbf{N}^*$，$m \in \mathbf{N}$，不难验证，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $f[f(n)] = n^2$．

因此存在函数 $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$，使对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，都有 $n^2 - 1 < f[f(n)] < n^2 + 2$．

例 2 是否存在一个这样的函数 $f(x)$，它不是多项式且对任意实数 x 有

$$(x-1)f(x+1) - (x+1)f(x-1) \geqslant 4x(x^2-1)?$$

解 答案是肯定的．任取函数 $f(x) = x^3 + xk(x)$，这里 $k(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个有界的、非常数、一个周期为 2 的函数（例如，$k(x) = \sin(\pi x)$，$k(x) = x - [x]$，…），对这样的 $f(x)$ 和任意实数 x 有

$$\begin{aligned} &(x-1)f(x+1) - (x+1)f(x-1) \\ &= (x-1)(x+1)^3 - (x+1)(x-1)^3 + (x^2-1)[k(x+1) - k(x-1)] \\ &= 4x(x^2-1) + 0. \quad （因为 k(x) 的一个周期为 2） \end{aligned}$$

例 3 设函数 $f:(0,+\infty) \to (0,+\infty)$，且 $f(x)$ 是减函数，试解函数不等式



$$f[f(x)] \geqslant x. \quad ①$$

解 在①中令 $f(x) \to x$,得

$$f\{f[f(x)]\} \geqslant f(x). \quad ②$$

因为 $f(x)$ 是减函数,由①式得

$$f\{f[f(x)]\} \leqslant f(x). \quad ③$$

结合①、②式得

$$f\{f[f(x)]\} = f(x).$$

又 $f: (-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$,所以

$$f[f(x)] = x. \quad ④$$

如果有 x_1, x_2,使 $f(x_1) = f(x_2)$,则 $f[f(x_1)] = f[f(x_2)]$,由④得 $x_1 = x_2$,这表明 $f(x)$ 是一对一的,从而 $f(x)$ 有反函数.

由④式得 $f(x) = f^{-1}(x)$,说明 $f(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.

综上,所给函数不等式的通解是:定义域和值域均为 $(-\infty, +\infty)$,且图象关于直线 $y = x$ 对称的一一对应的减函数.

我们可通过构造,得到一些特解:

(1) $f(x) = -x + c\ (c \in \mathbf{R})$;

(2) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 1; \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x \leqslant 0, \\ \text{[illegible]}, & 0 < x \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{6x}, & x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

我们还可以通过对满足 $0 \leqslant x < 2$ 的实数 x 定义 $f(x)$,然后按照④将 $f(x)$ 的定义周期延拓到整个实数集上.

12. 求极限法

通过取极限或求导的方法,推求不等式的函数解的一种方法.它要求不等式中的未知函数具有可微性,往往通过将问题转化为微分方程来解.

例1 (2005年中国东南地区数学奥林匹克冬令营赛前培训A卷试题)求函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,满足

$$x[f(x+1) - f(x)] = f(x), \forall x \in \mathbf{R} \text{ 以及 } |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|, \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

解 取 $x = 0$ 得 $f(0) = 0$,$x \neq 0, -1$ 时,可改写为:$\dfrac{f(x+1)}{x+1} = \dfrac{f(x)}{x}$.

特别地,对任意 $x > 0$,及 $n \in \mathbf{N}^*$,有 $\dfrac{f(x+n)}{x+n} = \dfrac{f(x)}{x}$.



则 $|x-y| \geqslant |f(x+n)-f(y+n)|$

$$= \left|\frac{x+n}{x}f(x)-\frac{y+n}{y}f(y)\right|$$

$$= \left|f(x)-f(y)+n\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right]\right|.$$

从而 $\frac{|x-y|}{n} \geqslant \left|\frac{f(x)-f(y)}{n}+\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right]\right|$.

令 $n \to +\infty$,得 $\frac{f(x)}{x}=\frac{f(y)}{y}$,$\forall x,y>0$.即 $f(x)=kx, x>0$.

例 2 设连续函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且多项式 $g(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $f[g(x)] \geqslant g[f(x)]$,其中 a,b,c 是任意实数,试求 $f(x)$.

解 根据多项式 $g(x)$ 系数的任意性,可知 $g(x)$ 实际为零次、一次及二次多项式的集合.由于 $f(g(x)) \geqslant g(f(x))$,即

$$f(ax^2+bx+c) \geqslant af^2(x)+bf(x)+c. \quad ①$$

由实数 a,b,c 的任意性,知可取 $a=0,b=1$ 也成立,即

$$f(x+c) \geqslant f(x)+c, \quad f(x+c)-f(x) \geqslant c.$$

当 $c>0$ 时,$\frac{f(x+c)-f(x)}{c} \geqslant 1$,令 $c \to 0$,得 $f'(x) \geqslant 1$;

当 $c<0$ 时,$\frac{f(x+c)-f(x)}{c} \leqslant 1$,令 $c \to 0$,得 $f'(x) \leqslant 1$;

于是,$f'(x)=1$,$f(x)=x+t\,(t \in \mathbf{R})$.

回代 ① 式得 $ax^2+bx+c+t \geqslant a(x+t)^2+b(x+t)+c$.

对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,可得 $t=0$,所以 $f(x)=x$.

13. 微积分法

有些函数不等式,有时可以利用导数的定义,可先求导数,设法将问题转化为形如:

$$f'(x)=g(x)$$

的形式(这里 $g(x)$ 可积),然后通过积分得出

$$f(x)=\int g(x)\mathrm{d}x+c,$$

最后根据条件,得出 $f(x)$ 的解析式.

例 1 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,$f(0)=1$,且对任意的 x_1,x_2,有

$$f(x_1+x_2) \geqslant f(x_1)f(x_2).$$

试求 $f(x)$.

解 利用导数定义,取 $x_1=x, x_2=h$,得 $f(x+h) \geqslant f(x)f(h)$.

于是,$f(x+h)-f(x) \geqslant f(x)[f(h)-1]$.



当 $h>0$ 时，得 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geqslant f(x)[\frac{f(h)-1}{h}]$，

取极限，令 $h\to 0$，得 $f'(x)\geqslant f(x)f'(0)$。

当 $h<0$ 时，类似地可得 $f'(x)\leqslant f(x)f'(0)$，

因此，$f'(x)=f(x)f'(0)$。

于是，$[e^{-f'(0)x}f(x)]'=-f'(0)e^{-f'(0)x}f(x)+e^{-f'(0)x}f'(x)=0$，所以 $e^{-f'(0)x}f(x)=c$，所给函数不等式的解为 $f(x)=ce^{f'(0)x}=ca^x$，其中 $a=e^{f'(0)}$，由 $f(0)=1$，知 $c=1$，所以 $f(x)=a^x$，$a>0$，且 $a\neq 1$。

例 2 对 $\forall x,y,z\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y+z)+f(x)\geqslant f(x+y)+f(x+z)$，则此函数不等式的可微解是 $f(x)=ax+b$。

证 $f(x+y+z)+f(x)\geqslant f(x+y)+f(x+z)$，即

$f(x+y+z)-f(x+y)\geqslant f(x+z)-f(x)$，

当 $z>0$ 时，$\frac{f(x+y+z)-f(x+y)}{(x+y+z)-(x+y)}\geqslant\frac{f(x+z)-f(x)}{(x+z)-x}$，

令 $z\to 0$，对上式两边取极限，得微分不等式

$$f'(x+y)\geqslant f'(x)。$$

当 $z<0$ 时，$\frac{f(x+y+z)-f(x+y)}{(x+y+z)-(x+y)}\leqslant\frac{f(x+z)-f(x)}{(x+z)-x}$，类似地可得 $f'(x+y)\leqslant f'(x)$

于是 $f'(x+y)=f'(x)$，令 $x=0$，得 $f'(y)=f'(0)$，$f(y)=f'(0)y+b=ay+b$

评析 当定义域为 $[0,+\infty)$ 时，解函数为 $f(x)=ax+\int_0^x g(x)dx$，$g(x)\geqslant 0$

我们用 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)_k$ 表示轮流从 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 中取 k 个数相加，并记

$$F_k(x)=\sum f[x+(r_1,r_2,\cdots,r_n)_k]$$

这里 $r_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$，且不全为零，规定 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)_0=0$，则结论可推广为

若 $f^{(n)}(x)>$(或 $<$)0，$x+(r_1,r_2,\cdots,r_n)_k\in D$，则

$$F_n(x)+F_{n-2}(x)+\cdots\geqslant(\text{或}\leqslant)F_{n-1}(x)+F_{n-3}(x)+\cdots$$

例 3 设 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，若 $f(1)=0$，$a(y)$ 是常数函数，试求函数不等式

$$f(xy)\geqslant a(y)f(x)+f(y)$$

的连续解

解 由题给不等式得 $f(xy)-f(y)\geqslant a(y)f(x)$，

当 $x>1$ 时，$\frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}y\geqslant a(y)\frac{f(x)}{x-1}$，

令 $x\to 1$，得 $f'(y)y\geqslant a(y)f'(1)$，

当 $x<1$ 时，$\frac{f(xy)-f(y)}{xy-y}y\leqslant a(y)\frac{f(x)}{x-1}$，



令 $x\to 1$，得 $f'(y)y\leqslant a(y)f'(1)$。

由此得 $f'(y)y=a(y)f'(1)$。

所给函数不等式的形式解是 $f(y)=f'(1)\int_1^y\frac{a(y)}{y}\mathrm{d}y$。

例 4 （1994 第 26 届国际数学奥林匹克试题改编）设连续的单调函数 $f:(-1,+\infty)\to(-1,+\infty)$，$f(0)=0$，且满足

$$f[x+f(y)+xf(y)]\geqslant y+f(x)+yf(x),\text{对 }\forall x,y\in(-1,+\infty),$$

试求 $f(x)$。

解 因为 $f(x)$ 是连续的单调函数，又 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在零点两边符号相反，且 $y\to 0$ 时，$f(y)\to 0$，$x+f(y)+xf(y)-x\to 0$。

$$f[x+f(y)+xf(y)]-f(x)\geqslant y[1+f(x)],$$

当 $y>0$ 时，

$$\frac{f[x+f(y)+xf(y)]-f(x)}{x+f(y)+xf(y)-x}\cdot\frac{f(y)+xf(y)}{y}\geqslant 1+f(x),$$

由 $1+x>0$，得 $\frac{f[x+f(y)+xf(y)]-f(x)}{x+f(y)+xf(y)-x}\cdot\frac{f(y)}{y}\geqslant\frac{1+f(x)}{1+x}$，

令 $y\to 0$，得 $f'(x)f'(0)\geqslant\frac{1+f(x)}{1+x}$，

当 $-1<y<0$ 时，

$$\frac{f[x+f(y)+xf(y)]-f(x)}{x+f(y)+xf(y)-x}\cdot\frac{f(y)+xf(y)}{y}\leqslant 1+f(x),$$

由 $1+x>0$，得 $\frac{f[x+f(y)+xf(y)]-f(x)}{x+f(y)+xf(y)-x}\cdot\frac{f(y)}{y}\leqslant\frac{1+f(x)}{1+x}$，

令 $y\to 0$，得 $f'(x)f'(0)\leqslant\frac{1+f(x)}{1+x}$，

从而有 $f'(x)f'(0)=\frac{1+f(x)}{1+x}$，

记 $f'(0)=a$，上式化为 $a(1+x)f'(x)=1+f(x)$，

当 $f'(0)=0$ 时，$1+f(x)=0$，所以 $f(x)=-1$，不是单调函数，舍去。

当 $f'(0)\neq 0$ 时，上式化为

$$a(1+x)f'(x)-f(x)=1,\tag{①}$$

于是，

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{a}}f(x)\right]'&=\left[(1+x)^{-\frac{1}{a}}f(x)\right]'\\&=(1+x)^{-\frac{1}{a}}f'(x)-\frac{1}{a}(1+x)^{-\frac{1}{a}-1}f(x)\\&=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{1+\frac{1}{a}}[a(1+x)f'(x)-f(x)],\end{aligned}$$

即 $$\left[\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{a}} f(x)\right]' = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{a}+1},$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{a}} f(x) = \int \frac{1}{a}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{a}+1} dx = -\left(\frac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{a}} + c,$$

$$f(x) = c(1+x)^{\frac{1}{a}} - 1.$$

由 $f(0)=0$,得 $c=1$,由 $f'(0)=a$,在①中取 $x=0$ 代入,得 $a^2=1$,即 $a=-1$ 或 $a=1$

当 $a=-1$ 时,$f(x)=(1+x)^{-1}-1=-\frac{x}{1+x}$;

当 $a=1$ 时,$f(x)=(1+x)-1=x$

综上,所给函数不等式的解是 $f(x)=-\frac{x}{1+x}$;$f(x)=x$

经验证,所求的两个解均为原函数不等式的解.

14. 幂级数法

用幂级数法求解函数不等式,首先假定未知函数是解析的,即 $f(x)$ 能在某点的领域内展开成幂级数,且幂级数具有正的收敛半径.在解具体的函数不等式时,我们可选取幂级数 $f(x)=\sum a_n x^n$,假定它有正的收敛半径且满足函数不等式,并将它代入函数不等式引入辅助函数后得到的函数方程,再用求导法确定各项系数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$,从而形式地得到函数不等式的幂级数解,再考虑幂级数是否真的有正的收敛半径,如果形式解 $f(x)=\sum_{n} a_n x^n$ 有正的收敛半径,就说函数不等式有解析解,否则就说函数不等式无解析解.

用幂级数法求解函数不等式的依据是:

设 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上无穷多次可微的非负函数,若 $a_0=b_0+g(0)$,且

$$\sum a_n x^n = \sum b_n x^n + g(x), \tag{①}$$

则 $a_k = b_k + \frac{1}{k!}g^{(k)}(0)\quad(k=0,1,2,\cdots)$

证明 在①式两边求导 k 次后,令 $x=0$,即可得

$$k!a_k = k!b_k + g^{(k)}(0)\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

例1 解函数不等式 $f(x)\geqslant(1-qx)f(qx)$,$|q|<1$,$q\neq 0$.

解 令 $f(x)=(1-qx)f(qx)+g(x)$,$\forall g(x)\geqslant 0$,设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,则

$$\sum a_n x^n = (1-qx)\sum_{n} a_n (qx)^n + g(x),$$

即 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (qx)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (qx)^{n+1} + g(x) \tag{①}$$



令 $x=0$，得 $a_0=a_0+g(0)$，故 $g(0)=0$.

在 ① 式两边求导 k 次后，令 $x=0$，可得

$k!a_k=k!a_kq^k-k!a_{k-1}q^k+g^{(k)}(0)$，$(k=1,2,\cdots)$，即 $(q^k-1)a_k=a_{k-1}q^k-\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)$

分别令 $k=1,2,\cdots$，可得

$$a_1=\frac{q}{q-1}a_0-\frac{1}{q-1}g'(0),\ a_2=\frac{q^2}{q^2-1}a_1-\frac{1}{2(q^2-1)}g''(0),$$

……

我们可用 a_0 表示出 $a_k(k=1,2,\cdots)$，下略.

例 2 解函数不等式 $f(2x)\geqslant xf(x)$.

解 令 $f(2x)=xf(x)+g(x)$，$\forall g(x)\geqslant 0$，设 $f(x)=\sum a_kx^k$，则

$$\sum_{k=0} a_k2^kx^k=x\sum_{k=0} a_kx^k+g(x),$$

$$\sum_{k=0} a_k2^kx^k=\sum_{k=0} a_kx^{k+1}+g(x). \quad ①$$

令 $x=0$，得 $a_0=g(0)$

在 ① 式两边求导 k 次后，令 $x=0$，可得

$$k!2^ka_k=k!a_{k-1}+g^{(k)}(0),(k=1,2,\cdots).$$

故所给函数不等式的解为 $f(x)=\sum\limits_k a_kx^k$，其中 $2^ka_k=a_{k-1}+\frac{1}{k!}g^{(k)}(0),(k=1,2,\cdots)$，$a_0=g(0)$.

说明 我们取特殊的一个函数 $g(x)=x^2$，由 $2^ka_k=a_{k-1}+\frac{1}{k!}g^{(k)}(0),(k=1,2,\cdots)$ 及 $g^{(k)}(x)=0,k\geqslant 3$，可得

$a_0=a_1=0$，$a_2=\frac{1}{4}$，$2^ka_k=a_{k-1}\ (k=3,4,\cdots)$，$a_k=2^{-\frac{(k+2)(k-1)}{2}}$.

所给函数不等式的形式解为 $f(x)=\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1}{2^5}x^3+\cdots+\frac{1}{2^{\frac{(k+2)(k-1)}{2}}}x^k+\cdots$

15. 其他一些初等技巧

求解函数不等式还有很多初等技巧，下面仅举一种

① 参数方程法

通过设参数方程，消去参数得到函数间的对应关系，从而求出函数不等式的解

例 1 解函数不等式 $f(\sec x-1)\leqslant\tan^2 x+2$.

解 设 $\begin{cases}u=\sec x-1\\ v=\tan^2x+2\end{cases}$，则 $(u+1)^2=v-2+1$，$v=(u+1)^2+1=u^2+2u+2$，$(u\neq$



0),代入所给函数不等式,得函数不等式的通解:

当 $u \neq 0$ 时,$f(u) \leqslant u^2 + 2u - 2$;其他情形,条件对函数没有约束,可任意取值(或不定义

② 基本不等式法

例2 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,1)$ 上取值恒为正数,且对任何 $x, y \in (0,1)$,均有 $\dfrac{f(x)}{f(y)} + \dfrac{f(1-x)}{f(1-y)} \leqslant 2$,试确定所有这样的函数 f.

解 对任意 $x, y \in (0,1)$,必有 $1-x, 1-y \in (0,1)$.由已知条件 $\dfrac{f(x)}{f(y)} + \dfrac{f(1-x)}{f(1-y)} \leqslant 2$,交换 x, y 得 $\dfrac{f(y)}{f(x)} + \dfrac{f(1-y)}{f(1-x)} \leqslant 2$,相加并利用基本不等式,有

$$
\begin{aligned}
4 &\geqslant \frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(1-x)}{f(1-y)} + \frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)} \\
&= \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right] + \left[\frac{f(1-x)}{f(1-y)} + \frac{f(1-y)}{f(1-x)}\right] \\
&\geqslant 2 + 2 = 4.
\end{aligned}
$$

等号成立当且仅当 $\begin{cases} f(x) = f(y) \\ f(1-x) = f(1-y) \end{cases}$,由 x, y 的任意性,知 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上为常数函数.

③ 数形结合法

例3 试求满足下列条件的所有函数 $f(x)$:对任何实数 a, b, p,$f[pa + (1-p)b] \leqslant pf(a) + (1-p)f(b)$ 成立.

解 显然,任一线性函数:$f(x) = Ax + B$,满足条件.

如果有非线性函数 $f(x)$ 也满足所给条件,则在其图象上必有三点不在一直线上.记 $M(x_1, y_1)$,$N(x_2, y_2)$,$P(x_3, y_3)$ 为 $f(x)$ 的图象上的不在一直线上的三点(如图3-1所示).

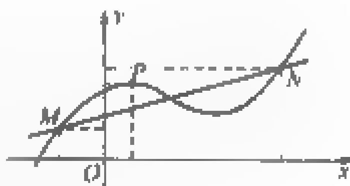


图3-1

为确定起见,不妨设 P 位于直线 MN 的上方(当 P 位于 MN 下方时,可以类似讨论).

直线 MN 的方程为 $y = y_1 + \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.因 P 位于 MN 上方,所以有

$$
y_3 > y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1) = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} y_2.
$$

即
$$
f(x_3) > \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) \qquad ①
$$

注意到所给的条件,若令

$a = x_1$,$b = x_2$,$pa + (1-p)b = x_3$,此时,



$$p=\frac{x_2-x_1}{x_2-x}<1,\quad p=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

所给条件就是 $f(x_3)\leqslant pf(x_1)+(1-p)f(x_2)=\frac{x_2-x_3}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$

这与①式矛盾.故非线性函数不能满足所给条件,从而便知,所求的满足条件的所有函数为任意线性函数.

能力训练 3

1. 已知 $f(\sin x-1)\geqslant\cos^2x+2$,试求 $f(x)$.

2. 解函数不等式 $f\left(\frac{1}{1-x}\ \frac{x}{x}\right)\geqslant x$.

3. 求满足不等式 $f[f(x)]\geqslant x-3$,$x\in\mathbf{R}$ 的一次函数 $f(x)$.

4. 求满足不等式 $f[f(x)]\geqslant x$,$x\in(1,+\infty)$ 的幂函数 $f(x)$.

5. 已知 $f(x)$ 是一次函数,且 $\underbrace{f(f[f\cdots f(x)])}_{10}\geqslant 1024x+1023$,求 $f(x)$.

6. 设 $ab\neq0$,$a^2\neq b^2$,求 $af(x)+bxf\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant\sin x(x>0)$ 的解.

7. 假设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足对于一切 $\mathbf{R}$ 中的 x,y 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant(x-y)^2$,证明 f 为常数.

8. 求满足下列函数不等式的函数 $f(x)$:

$$f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\geqslant\sin x$$

9. 设 $f,g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,$f(n)=2n+1$,$g(1)=3$ 且

$$g(n)\geqslant f[g(n-1)],\ \forall n\geqslant2. \tag{①}$$

试求 $g(n)$.

10. 设 f 为定义在所有正整数上的实函数,$f(1)=\frac{1}{2}$ 且

$$f(n+1)\geqslant\frac{3f(n)}{2f(n)+1}(n\geqslant1). \tag{①}$$

试求 $f(n)$.

11. 试解函数不等式:

$$nf(n)-(n-1)f(n+1)\geqslant1\quad 且\quad f(2)=3,\ n\geqslant2.$$

12. 设连续的单调函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(0)=1$,且满足不等式

$$f(x+y)\geqslant f(x)f(y)-f(xy)+1. \tag{①}$$

试求 $f(x)$.

13. (2003 年爱尔兰奥林匹克竞赛题)证明:不存在定义在正实数集上的函数 f,使得对



任意 $y>x>0$，均有 $f(y)>(y-x)f^2(x)$

14. 证明 不存在函数 $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$，使得对任何正实数 x,y，都有

$$[f(x)]^2 \geqslant f(x+y)[f(x)+y]. \quad ①$$

15. 设正值连续函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，对任意实数 x,y，满足

$$f(x)-f(y) \geqslant a(x-y)f\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

这里 a 是一个常数，试求 $f(x)$.

16 (2006年浙江省高中数学竞赛集训试题改编) 若 $f(0)=\frac{1}{2}$，试求对每一实数对 (x,y) 满足 $f(x+y) \geqslant f(x)+f(y)+f(xy)+1$ 的连续函数 $f(t)$

17 (1993年第25届IMO试题) 论证是否存在一个函数 $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$，

(1) 使得 $f(1)=2$；

(2) $f[f(n)]=f(n)+n$ 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立；

(3) $f(n)<f(n+1)$ 对于一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.

18. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且对任意正数 x 均有 $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$，

(1) 判断函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的单调性；

(2) 设 $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$，比较 $f(x_1)+f(x_2)$ 与 $f(x_1+x_2)$ 的大小，并证明你的结论；

(3) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (0,+\infty)$，若 $n \geqslant 2$，比较 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 与 $f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 的大小，并证明你的结论.

19. 函数 f 定义在 $\mathbf{R}^+$ 上，并且满足下面条件：

(1) $f(x)$ 严格递增；

(2) 对任意 $x \in \mathbf{R}^+$，都有 $f(x)>-\frac{1}{x}$；

(3) 对任意 $x \in \mathbf{R}^+$，都有 $f(x)f\left[f(x)+\frac{1}{x}\right]=1$.

求 $f(1)$ 并给出一个满足上述条件的函数

20 设可微的单调函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，$f(0)=0$，且满足不等式

$$f[f(x)] \geqslant (\lambda+1)f(x)-\lambda x. \quad ①$$

求 $f'(0)$

21. 证明 不存在函数 $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$，使得对任意 $x,y \in \mathbf{R}^+$，都有 $f(x+y) \geqslant f(x)+yf[f(x)]$ 这里 $\mathbf{R}^+$ 表示由全体正实数组成的集合.

22. (第4届大学生国际数学奥林匹克试题) 证明 不存在实数集到实数集的映射 f，使得对于所有的正实数 x,y，有



$$f(x+y) > f(x)[1+yf(x)] \quad ①$$

成立

23.（2004 年泰国数学奥林匹克试题）是否存在函数 $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$，对所有的 $x, y \in \mathbf{R}^+$，$[f(x+y)]^2 \geqslant [f(x)]^2[1+yf(x)]$.

24. 试求出所有定义在$(0,+\infty)$上满足

$$ab \leqslant \frac{1}{2}\{af(a)+bf^{-1}(b)\}$$

的正值函数，其中 $a, b \in (0,+\infty)$.

25. 设 $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 是连续函数，$f(1)=1$，对 $\forall x_i \in \mathbf{R}^+, i=1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}$，试解函数不等式：$f\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$.



第[illegible]讲　函数不等式解函数的性质

知识扫描

在由函数不等式给出的试题中，未知函数性质的论证是一块重要的内容，主要讨论未知函数的单调性、有界性、周期性等，对于定义在整数集上的未知函数，则主要讨论函数值的奇偶性、整除性，及函数值的取值范围等。

例题分析

例1　集合A由适合以下性质的函数 $f(x)$ 构成：对于任何的 x [illegible]，y [illegible]，且 $x\neq$ [illegible]，都有

$$f(x)+2f(y)>3f\left(\frac{x+2y}{3}\right)$$

试判断 $f_1(x)=\log_2 x$ 及 $f_2(x)=$ [illegible] $(x+1)$ 是否在集合A中？说明理由。

解　取 $x=1$，$y=4$，则

$$f_1(1)+2f_1(4)=\log_2 1+2\log_2 4=\log_2 16,$$

$$3f_1\left(\frac{1+2\times 4}{3}\right)=3\log_2 3=\log_2 27>\log_2 16,$$

所以 $$f_1(1)+2f_1(4)<3f_1\left(\frac{1+2\times 4}{3}\right)$$

故 $$f_1(x)\notin A$$

任取 $x>0$，$y>0$ 且 $x\neq y$，则

$$f_2(x)+2f_2(y)\ [illegible]\ 3f_2\left(\frac{x+2y}{3}\right)$$

$$=(x+1)^2+2(y+1)^2-3\left(\frac{x+2y}{3}+1\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}(x-y)^2 \geqslant 0,$$

即
$$f_2(x)+2f_2(y)\geqslant 3f_2\left(\frac{x+2y}{3}\right),$$

故
$$f_2(x)\in A.$$

评析 讨论"是否属于某集合"问题，验证"不属于"的简便方法是举反例加以说明；验证"属于"，一般依题意代入计算即可。

例2 若对任意 $x\in A$，$y\in B$（$A\subseteq \mathbf{R}$，$B\subseteq \mathbf{R}$）有唯一确定的 $f(x,y)$ 与之对应，则称 $f(x,y)$ 为关于 x、y 的二元函数。

现定义满足下列性质的二元函数 $f(x,y)$ 为关于实数 x、y 的广义"距离"：

（1）非负性：$f(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时取等号；

（2）对称性：$f(x,y)=f(y,x)$；

（3）三角形不等式：$f(x,y)\leqslant f(x,z)+f(z,y)$ 对任意的实数 z 均成立。

今给出三个二元函数，请选出所有能够成为关于 x、y 的广义"距离"的序号：

① $f(x,y)=|x-y|$；② $f(x,y)=(x-y)^2$；③ $f(x,y)=\sqrt{x-y}$。

正确的序号是________。

解 只有①三个性质都满足；其中②不满足性质（3），③不满足性质（2），因此正确答案为①。

评析 本题是一个概念（定义）学习型试题，除了新颖的符号、运算外，往往给出新的定义，具体求解时需要与已有的旧概念进行区分与联系，并在此基础上研究新概念或定义的内涵和外延。解决这类问题，只需验证对象是否满足定义中的条件和本质内涵。

例3 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且满足：① 对于任意的 x、$y\in\mathbf{R}$，有 $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$；② 当 $x>0$ 时，$f(x)<0$。判断 $f(x)$ 的单调性。

解 任取 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，设 $x_1<x_2$。

由条件①得 $f(x_2)=f[(x_2-x_1)+x_1]\leqslant f(x_2-x_1)+f(x_1)$，即 $f(x_2-x_1)\geqslant f(x_2)-f(x_1)$。

因为 $x_2-x_1>0$，由条件②得 $f(x_2-x_1)<0$，所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数。

例4 （2008年浙江省理科高考压卷题推广）定义在 $\mathbf{R}$ 上的非负值函数 $f(x)$ 满足

$$f^2(x+1)+f(x+1)-1\leqslant f^2(x), \qquad ①$$

且 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$，证明：对任意的 $x\in\mathbf{R}^+$，有 $f(x)\leqslant 1$。



证明 由于 $f(x)$ 是非负函数，且 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，可见 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)<1$.

在 ① 式两边减去 1，得

$$[f(x+1)-1][f(x+1)+2]\leqslant[f(x)-1][f(x)+1].$$

因为 $f(x+1)+2>0$，$f(x)+1>0$，所以当 $f(x)<1$ 时，$f(x+1)-1$ 与 $f(x)-1$ 同号，均为负.

故由 $f(x)<1$，可推出 $f(x+1)<1$. ②

据此，由 $x\in[0,1]$ 时，$f(x)<1$，可推出 $x\in[1,2]$ 时，也有 $f(x)<1$.

类似地，再用 ② 式，可推出 $x\in[2,3]$ 时，$f(x)<1$，…，进一步地，用数学归纳法可证，对 $x\in\mathbf{R}^+$，都有 $f(x)<1$.

例 5 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+3)\leqslant f(x)+3$ 和 $f(x+2)\geqslant f(x)+2$，令 $g(x)=f(x)-x$.

(1) 求证 $g(x)$ 是周期函数；(2) 如果 $f(994)=992$，求 $f(2008)$.

解 (1) 证：由 $g(x)=f(x)-x$，得

$$g(x+2)=f(x+2)-x-2,$$
$$g(x+3)=f(x+3)-x-3.$$

由 $f(x+3)\leqslant f(x)+3$ 和 $f(x+2)\geqslant f(x)+2$ 代入得

$$g(x+2)\geqslant f(x)+2-x-2=f(x)-x, \quad ①$$
$$g(x+3)\leqslant f(x)+3-x-3=f(x)-x. \quad ②$$

由 ① 得 $g(x+4)\geqslant f(x+2)-x-2\geqslant f(x)+2-x-2=f(x)-x$, ③

$$g(x+6)\geqslant f(x+2)-x-2\geqslant f(x)+2-x-2=f(x)-x. \quad ④$$

由 ② 得 $g(x+6)\leqslant f(x+3)-x-3\leqslant f(x)-x$.

由 ⑤、④ 得 $g(x+6)=f(x)-x=g(x)$，$g(x)$ 以 6 为周期的周期函数.

(2) 解：$2008-994=1014$ 是 6 的倍数.

所以 $g(2008)=g(994)$，

即 $f(2008)-2008=f(994)-994$，

所以 $f(2008)=f(994)+1014=2006$.

说明 这时用不等式法推证的依据是：若 $A\leqslant B\leqslant A$，则 $A=B$.

例 6 (2008 年全国高中数学联合竞赛第 1 试试题) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(0)=2008$，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，满足 $f(x+2)-f(x)\leqslant 3\cdot 2^x$，$f(x+6)-f(x)\geqslant 63\cdot 2^x$，则 $f(2008)=$ ______.

解法 1 由题设条件知



$$f(x+2)-f(x)=-[f(x+4)-f(x+2)]-[f(x+6)-f(x+4)]+[f(x+6)-f(x)]$$
$$\geqslant -3\cdot 2^{x+2}-3\cdot 2^{x+4}+63\cdot 2^{x}=3\cdot 2^{x}.$$

因此有 $f(x+2)-f(x)=3\cdot 2^{x}$，故

$$\begin{aligned} f(2008)&=f(2008)-f(2006)+f(2006)-f(2004)+\cdots+f(2)-f(0)+f(0)\\ &=3\cdot(2^{2006}+2^{2004}+\cdots+2^{2}+1)+f(0)\\ &=3\cdot\frac{4^{1004}-1}{4-1}+f(0)\\ &=2^{2008}+2007. \end{aligned}$$

解法 2 令 $g(x)=f(x)-2^{x}$，则

$$g(x+2)-g(x)=f(x+2)-f(x)-2^{x+2}+2^{x}\leqslant 3\cdot 2^{x}-3\cdot 2^{x}=0,$$

$$g(x+6)-g(x)=f(x+6)-f(x)-2^{x+6}+2^{x}\geqslant 63\cdot 2^{x}-63\cdot 2^{x}=0.$$

即 $g(x+2)\leqslant g(x)$，$g(x+6)\geqslant g(x)$，

故 $g(x)\leqslant g(x+6)\leqslant g(x+4)\leqslant g(x+2)\leqslant g(x)$，

得 $g(x)$ 是一个周期为 2 的周期函数。

所以 $f(2008)=g(2008)+2^{2008}=g(0)+2^{2008}=2^{2008}+2007$

例 7 已知函数不等式

$$f(x)\geqslant\cos\frac{x}{2}f\left(\frac{x}{2}\right),$$

其中 $f(x)$，$x\in(-\pi,\pi)$ 为连续函数，且 $f(0)=1$，求证：$f(x)\geqslant\frac{\sin x}{x}$

解 由已知函数不等式可推得

$$f\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant\cos\frac{x}{2^{2}}f\left(\frac{x}{2^{2}}\right),$$

$$f\left(\frac{x}{2^{2}}\right)\geqslant\cos\frac{x}{2^{3}}f\left(\frac{x}{2^{3}}\right),$$

由此推得 $f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)\geqslant\cos\frac{x}{2^{n}}f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)$，

注意到 $x\in(-\pi,\pi)$，$\cos\frac{x}{2^{i}}>0$，$i=1,2,\cdots,n$，结合原函数不等式，可得

$$\begin{aligned} f(x)&\geqslant\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^{2}}\cos\frac{x}{2^{3}}\cdots\cos\frac{x}{2^{n}}\cdot f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)\\ &=\frac{\sin x}{2^{n}\cdot\sin\frac{x}{2^{n}}}\cdot f\left(\frac{x}{2^{n}}\right)=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2^{n}}}{\frac{x}{2^{n}}}}\cdot f\left(\frac{x}{2^{n}}\right), \end{aligned}$$



因为 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(0)=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}\cdot f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}\cdot\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=1\cdot f(0)=1,$$

所以 $f(x)\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}}\cdot f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$，

即 $f(x)\geqslant\dfrac{\sin x}{x}$.

例 8 设函数 $f:(-\infty,+\infty)\to(0,+\infty)$，使得

$$f[x-f(y)]\geqslant f(x)+f[f(y)]-axf(y)-bf(y)-c$$

对一切 $x,y\in\mathbf{R}$ 都成立，求证：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}\leqslant\dfrac{a}{2}$.

解 取 $x=f(y)$，得

$$f(0)\geqslant 2f[f(y)]-af^2(y)-bf(y)-c,$$

即 $f[f(y)]\leqslant\dfrac{a}{2}f^2(y)+\dfrac{b}{2}f(y)+\dfrac{c+f(0)}{2}$.

所以 $f(x)\leqslant\dfrac{a}{2}x^2+\dfrac{b}{2}x+\dfrac{c+f(0)}{2}$，

当 $x\neq 0$ 时，两边同除 x^2，得

$$0<\frac{f(x)}{x^2}\leqslant\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{c+f(0)}{2x^2}$$

取极限，得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}\leqslant\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{c+f(0)}{2x}\right]=\dfrac{a}{2}$

例 9 设定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$f(x)$ 满足 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，且对区间 D 上的任意两相异实数 x_1、x_2，恒有

$$|f_1(x_1)-f_1(x_2)|>|f_2(x_1)-f_2(x_2)|.$$

(1) 若 $y=f_1(x)$ 是区间 D 上的增函数，能否确定 $y=f(x)$ 是区间 D 上的增函数?

(2) 若 $y=f_2(x)$ 是区间 D 上的增函数，能否确定 $y=f(x)$ 是区间 D 上的增函数?

在上述两问中，如果能够确定，请给出证明；否则，请举一反例.

分析 从几何意义上思考，就不难看到问题的本质，并作出正确的判断.

$|f_1(x_1)-f_1(x_2)|>|f_2(x_1)-f_2(x_2)|$ 意味着什么?意味着 $f_1(x)$ 的变化比 $f_2(x)$ 来得显著，$f_1(x)$ 的变化幅度要大些，$f_2(x)$ 的变化幅度小些. 那么单调性由谁决定呢?由变化显



著的部分来决定．由此可以断定，第一问能够确定，第二问不能确定．事实上

$$f(x_2)-f(x_1)=[f_1(x_2)+f_2(x_2)]-[f_1(x_1)+f_2(x_1)]$$
$$=[f_1(x_2)-f_1(x_1)]+[f_2(x_2)-f_2(x_1)].$$

因为"两数相加，符号取绝对值较大的那个数的符号"，所以，$f_1(x_2)>f_1(x_1)$ 时，$f(x_2)>f(x_1)$，也就是 $f_1(x)$ 与 $f(x)$ 有同样的单调性．这是一种简捷的证法，只用到了数学中最基本的知识——异号两数相加的符号法则．当然有了第一问"能够确定"的猜想，我们也可以用打开绝对值的方法来证明．

解 (1) 能够确定．证明如下：

因为 $y=f_1(x)$ 是区间 D 上的增函数，所以对任意的 $x_1,x_2\in D$，若 $x_2>x_1$，恒有 $f_1(x_2)-f_1(x_1)>0$．

又 $|f_1(x_2)-f_1(x_1)|>|f_2(x_2)-f_2(x_1)|$，

所以 $f_1(x_2)-f_1(x_1)>f_2(x_1)-f_2(x_2)$，

所以 $f_1(x_2)+f_2(x_2)>f_1(x_1)+f_2(x_1)$，

即 $f(x_2)>f(x_1)$，

故 $y=f(x)$ 是区间 D 上的增函数．

(2) 不能确定．

令 $f_1(x)=x$，则 $f_1(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$f_2(x)=-2x$ 对任意的两实数 x_1,x_2，满足 $|f_2(x_1)-f_2(x_2)|=2|x_1-x_2|>|x_1-x_2|=|f_1(x_1)-f_1(x_2)|$，但 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)=-x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数．

评析 第二问构造反例的方法是寻求直观解释的方法．反例具有多样性，比如 $f_1(x)$ 还可以是非单调函数．

探索 这道题直观意义的作用包括：① 帮助我们从不同的视角理解题意，如果已知条件是用文字叙述的，把它翻译成图表，理解起来就容易得多；② 明确这道题的解题方向，因为解题思路的产生更多的源于直觉，源于我们对这道题的直观判断，除非它是常规题型；③ 预期这道题的最终结果，直观意义往往可以超越逻辑步骤，捷足先登地直抵目标．但具体到解答步骤，还是要回到数学的抽象表达，运用严密的数学推理．

数学的直观意义远不只是用图形来刻画数或式，也可用数或式来说明图象，用现实意义来描述抽象的结构等．

例 10 （2003年越南数学奥林匹克竞赛试题）设 F 是满足以下条件的全部函数 f 的集合：$f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，且对任何正实数 x 成立：

$$f(3x)\geqslant f[f(2x)]+x.$$

求满足以下条件的最大实数 a：对所有 $f\in F$ 成立 $f(x)\geqslant ax$，其中 x 为任何正实数．（$\mathbf{R}^+$ 表示全部正实数的集合）

解 显然，函数 $f(x)=\dfrac{x}{2}(x\in\mathbf{R}^+)\in F$．



于是 $a \leqslant \frac{1}{2}$

设 f 是 F 中任意一个函数，易知

$$f(x) \geqslant \frac{x}{3},\ x \in \mathbf{R}^{+}. \qquad ①$$

考虑由下式定义的数列 $\{a_n\}$：

$$a_1 = \frac{1}{3},\ a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{3},\ n = 1, 2, \cdots$$

对 n 用归纳法，我们来证明：对任意的 $n \in \mathbf{N}^{+}$，有

$$f(x) \geqslant a_n x,\ x \in \mathbf{R}^{+}. \qquad ②$$

事实上，式 ① 表明，当 $n = 1$ 时，式 ② 成立。

假定当 $n = k$ 时，式 ② 成立，则有

$$f(x) \geqslant a_k f\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{x}{3} \geqslant a_k a_k \cdot \frac{2x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2a_k^2 + 1}{3} \cdot x = a_{k+1} x,\ x \in \mathbf{R}^{+}$$

于是当 $n = k + 1$ 时，式 ② 也成立。

根据数学归纳法，式 ② 恒成立。

下面证明 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$。

首先对 n 进行归纳，易证序列 $\{a_n\}$ 以 $\frac{1}{2}$ 为上界，因此 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3}(a_n - 1)(2a_n - 1) > 0$

这表明 $\{a_n\}$ 是一个递增序列，因而 $\{a_n\}$ 是一个收敛序列。

对 $a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{3}$ 求极限，可得 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{1}{2}$，于是有 $f(x) \geqslant \frac{x}{2},\ x \in \mathbf{R}^{+}$。

因此 $a = \frac{1}{2}$

例 11　整数列 $\{f(n)\}$ 定义如下：$f(1) = 2,\ f(2) = 7$，

$$-\frac{1}{2} < f(n+1) - \frac{f^2(n)}{f(n-1)} \leqslant \frac{1}{2}\ (n \geqslant 2).$$

证明　对一切 $n > 1$，$f(n)$ 为奇数。

分析　本题的特殊点在于所给递推关系是不等式，应对它作适当变形，找出等量关系，以便进行推证。

为此，先试求数列前几项，得

$$f(1) = 2,\ f(2) = 7,\ f(3) = 25,\ f(4) = 89,\ \cdots$$

推测它们之间可能存在一个线性递推关系，经试算有



$$f(n)=3f(n-1)+2f(n-2)\ (n\geqslant 3). \qquad ①$$

下证①式成立.

当 $n=3$ 时,①显然成立.

假设 $n=k$ 时,①式成立,那么

$$\frac{f^2(k)}{f(k-1)}=\frac{f(k)[3f(k-1)+2f(k-2)]}{f(k-1)}=3f(k)+2\cdot\frac{f(k)f(k-2)}{f(k-1)}$$

$$=3f(k)+2f(k-1)-2\cdot\frac{f^2(k-1)-f(k)f(k-2)}{f(k-1)} \qquad ②$$

由于 $f(1)=2$, $f(2)=7$ 都是整数,易证 $3f(k)+2f(k-1)\ (k\geqslant 2)$ 都是整数. 如果能证明

$$\left|2\cdot\frac{f^2(k-1)-f(k)f(k-2)}{f(k-1)}\right|<\frac{1}{2}, \qquad ③$$

则按题设递推规则,就有

$$f(k+1)=3f(k)+2f(k-1)$$

为证明③,可将它变形为

$$\left|2\cdot\frac{f^2(k-1)-f(k)f(k-2)}{f(k-1)}\right|=\left|\frac{2f(k-2)}{f(k-1)}\right|\cdot\left|\frac{f^2(k-1)-f(k)f(k-2)}{f(k-2)}\right|$$

$$=\left|\frac{2f(k-2)}{f(k-1)}\right|\cdot\left|f(k)-\frac{f^2(k-1)}{f(k-2)}\right|,$$

其中前一因式 <1(仍用数学归纳法证明),后一因式满足

$$-\frac{1}{2}<f(k)-\frac{f^2(k-1)}{f(k-2)}\leqslant\frac{1}{2}.$$

所以

$$\left|2\cdot\frac{f^2(k-1)-f(k)f(k-2)}{f(k-1)}\right|<\frac{1}{2}$$

因而对一切 $n\geqslant 3$,①式均成立.

再由①式可以判断 $f(n)$ 与 $f(n-1)$ 有相同的奇偶性,由于 $f(2)=7$ 为奇数,故 $n>1$ 时,$f(n)$ 必为奇数.

例 12　函数 $f: \mathbf{N}^+\to\mathbf{N}^+$ 满足

(1) $f(n+1)>f(n)$,

(2) $f[f(n)]=3n$.

求 $f(1992)$.

解　我们先把 f 的表达式求出来,然后再求 $f(1992)$.

首先,有 $f(1)=2$, $f(2)=3$.

因为若 $f(1)=1$,则 $f[f(1)]=f(1)=1\neq 3$,与(2)矛盾.



若 $f(1)\geqslant 3$，由条件(1)知，$f(3)\geqslant f(2)+1\geqslant f(1)+2\geqslant 5$，故

$$f[f(1)]\geqslant f(3)\geqslant 5\neq 3.$$

这与 $f[f(1)]=3$ 矛盾. 因此

$$f(1)=2,\ f(2)=f[f(1)]=3. \qquad ①$$

因为

$$f(3n)=f(f(f(n)))=f^{(2)}(f(n))$$
$$=3f(n),$$

即

$$f(3n)=3f(n). \qquad ②$$

所以由①式及②式立得(用归纳法易证)

$$\begin{cases} f(3^n)=2\cdot 3^n, \\ f(2\cdot 3^n)=3^{n+1}, \end{cases} n=0,1,2,\cdots.$$

注意到 $2\cdot 3^n$ 与 3^{n+1} 之间恰有 3^n-1 个自然数，而 3^n 与 $2\cdot 3^n$ 之间也恰有 3^n-1 个自然数. 由条件(1)(即 f 是严格单调增函数)，可得

$$f(3^n+m)=2\cdot 3^n+m,$$
$$0\leqslant m\leqslant 3^n,\ n=0,1,2,\cdots. \qquad ③$$

由③式，得

$$f(2\cdot 3^n+m)=f(f(3^n+m))=3(3^n+m).$$

于是，我们有

$$f(n)=\begin{cases} 2\cdot 3^k+m, 若\ n=3^k+m,\ 0\leqslant m\leqslant 3^k, \\ 3(3^k+m), 若\ n=2\cdot 3^k+m,\ 0\leqslant m\leqslant 3^k \end{cases}$$

由于 $1992=2\cdot 3^6+534$，所以

$$f(1992)=3(3^6+534)=3789.$$

例 13 已知函数 $f(x)$ 定义在 $[0,1]$ 上，且同时满足：① $f(1)=3$；② $f(x)\geqslant 2$；③ 若 $x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$，$x_1+x_2\leqslant 1$，则有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)-2$. (1) 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值；(2) 试比较 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 与 $\frac{1}{2^n}+2$ 的大小($n\in \mathbf{N}^*$)；(3) 某人发现：当 $x=\frac{1}{2^n}$ ($n\in \mathbf{N}$) 时，有 $f(x)<2x+2$. 由此他提出猜想：对于一切 $x\in(0,1]$，都有 $f(x)<2x+2$. 请你判断猜想是否正确，并说明理由.

解 (1) 略.

(2) 由(1)易知 $f(x)$ 是增函数. 令 $x_1=x_2=\frac{1}{2^{n+1}}$，则 $x_1+x_2=\frac{1}{2^n}$，所以 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)\geqslant f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)+f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2$，所以 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)-2\geqslant 2\left[f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)-2\right]$，令 $a_n=f\left(\frac{1}{2^n}\right)-2$，则 $a_n\geqslant 2a_{n+1}$，



所以 $a_n \leqslant \frac{1}{2}a_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$，即 $a_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n(f(1)-2)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)-2 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以 $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leqslant 2+\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(3) 对于任意 $x \in (0,1]$，总存在 $n \in \mathbf{N}^*$，使得 $\frac{1}{2^{n+1}} < x \leqslant \frac{1}{2^n}$，由 $f(x)$ 是增函数得 $f(x) \leqslant f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}+2$，且 $2x+2 > 2 \cdot \frac{1}{2^{n+1}}+2=\frac{1}{2^n}+2$. 所以 $f(x) < 2x+2$.

评析 本题的关键是要寻找 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 与 $f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ 之间的递推关系，首先寻找 $\frac{1}{2^{n+1}}$ 与 $\frac{1}{2^n}$ 之间的关系，它们的关系一般能想到两种 $\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}\times 2$ 和 $\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}$，由已知条件(1)知这里只要用"+"而不用"×"，所以选用后一式探求递推关系. 对于(3)是要学会用公比在(0，1)之间的等比数列将一个闭定区间切分成互斥(交集是空集，并集是全集)的数集进行研究，体现了要研究整体先研究部分的思想方法，这也是高等数学的常用研究方法.

例 14 (第5届中国中学生数学奥林匹克冬令营试题，1990年)设函数 $f(x)$ 对 $x \geqslant 0$ 有定义，且满足条件

(1) 对任何 x、$y \geqslant 0$，$f(x)f(y) \leqslant y^2 f\left(\frac{x}{2}\right)+x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$；

(2) 存在常数 $M > 0$，当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$|f(x)| \leqslant M$.

求证：$f(x) \leqslant x^2$.

证明 (用取极限法)在条件(1)中，令 $y=x$，得 $f^2(x) \leqslant 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$，令 $x=0$，$f^2(0) \leqslant 0$，$f(0)=0$，得

$$f(x) \geqslant \frac{1}{8x^2}f^2(2x) \geqslant 0 \quad (x > 0).$$

当 $x > 0$ 时，有

$$\frac{f^2(x)}{x^4} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2},\quad \frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}},$$

于是对任意正整数 n，有

$$\frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2^{1-\frac{1}{2^n}}} \cdot \frac{\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{\frac{1}{2^n}}}{\left(\frac{x}{2^n}\right)^{\frac{2}{2^n}}}=\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{2n+1}{2^n}} \cdot x^{-\frac{2}{2^n}}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]^{\frac{1}{2^n}}.$$

当 n 充分大时，$\frac{x}{2^n} \in (0,1]$，于是 $0 \leqslant f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leqslant M$



令 $n \to +\infty$，得到 $\frac{f(x)}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}$，所以 $f(x) \leqslant x^2$.

评析 实际上，我们在本题的假设下已证明

$$f(x) \leqslant \frac{1}{2}x^2$$

例 15 （第 48 届 IMO 预选题）对于所有的 m、$n \in \mathbf{N}^+$，函数 $f: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}^+$ 满足

$$f(m+n) \geqslant f(m) + f[f(n)] - 1,$$

求 $f(2007)$ 的所有可能的值，其中，$\mathbf{N}^+$ 为正整数集.

解 $f(2007)$ 的所有可能的值为 $1, 2, \cdots, 2008$.

对于任意的正整数 m、n，若 $m > n$，则

$$\begin{aligned} f(m) &= f[n + (m-n)] \\ &\geqslant f(n) + f[f(m-n)] - 1 \geqslant f(n). \end{aligned}$$

因此，f 是单调不降的.

对于任意的正整数 n，$f(n) = 1$，显然满足条件.

假设 $f(n) \not\equiv 1$，则存在最小的正整数 a，使得 $f(a) > 1$.

于是，对于所有的正整数 $b \geqslant a$，有

$$f(b) \geqslant f(a) > 1.$$

若存在正整数 n，使得 $f(n) > n$，则

$$\begin{aligned} f[f(n)] &= f([f(n)-n]+n) \\ &\geqslant f[f(n)-n] + f[f(n)] - 1. \end{aligned}$$

因此，$f[f(n)-n] \leqslant 1$.

于是，$f(n) - n < a$.

设 $f(n) - n$ 当 $n = k$ 时取到最大值 c.

则 $f(k) - k = c \geqslant 1$.

故 $2k + c \geqslant f(2k) = f(k+k)$

$$\begin{aligned} &\geqslant f(k) + f[f(k)] - 1 \\ &\geqslant f(k) + f(k) - 1 \\ &= 2(k+c) - 1 = 2k + (2c-1). \end{aligned}$$

于是，$c \leqslant 1$.

因此，对于所有的正整数 n，有

$$f(n) \leqslant n + 1.$$

特别地，有 $f(2007) \leqslant 2008$.



下面用例子来证明，$f(2007)$ 能取到从 1 到 2008 的值.

设 $f_j(n)=\max\{1,\ n+j-2007\}$ $(j=1,2,\cdots,2007)$，

$$f_{2008}(n)=\begin{cases} n, & 2007\nmid n;\\ n+1, & 2007\mid n.\end{cases}$$

则 $\quad f_j(2007)=j\ (j=1,2,\cdots,2007)$，

$$f_{2008}(2007)=2008.$$

对于 $j=1,2,\cdots,2007$，因为 f_j 是单调不降的，且 $f_j(n)\leqslant n$，于是，对于所有的正整数 n，有 $f_j[f_j(n)]\leqslant f_j(n)\leqslant n$.

若 $f_j(m)=1$，则

$$\begin{aligned} f_j(m+n)&\geqslant f_j(n)\geqslant f_j[f_j(n)]\\ &=f_j(m)+f_j[f_j(n)]-1, \end{aligned}$$

满足条件.

若 $f_j(m)\neq 1$，则

$$\begin{aligned} &f_j(m)+f_j[f_j(n)]-1\\ \leqslant\ & m+j-2007+n\\ =\ &(m+n)+j-2007=f_j(m+n). \end{aligned}$$

因此，$f_j\ (j=1,2,\cdots,2007)$ 满足条件.

因为对于所有的正整数 n，

$$n+1\geqslant f_{2008}(n)\geqslant n,$$

所以，$n+1\geqslant f_{2008}[f_{2008}(n)]$.

实际上，若 $f_{2008}(n)=n$，则

$$f_{2008}[f_{2008}(n)]=n.$$

若 $f_{2008}(n)=n+1$，则由 $2007\mid n$，得 $2007\nmid(n+1)$，于是，

$$f_{2008}[f_{2008}(n)]=f_{2008}(n+1)=n+1.$$

若 $2007\mid(m+n)$，则

$$\begin{aligned} f_{2008}(m+n)&=m+n+1\\ &=(m+1)+(n+1)-1\\ &\geqslant f_{2008}(m)+f_{2008}[f_{2008}(n)]-1. \end{aligned}$$

若 $2007\nmid(m+n)$，则要么 $2007\nmid m$，要么 $2007\nmid n$. 对于前面的情形有 $f_{2008}(m)=m$，后面的情形有 $f_{2008}[f_{2008}(n)]=f_{2008}(n)=n$. 故



$$f_{2005}(m)+f_{2005}[f_{2005}(n)]-1$$
$$\leqslant (m+n+1)-1=f_{2005}(m+n).$$

因此，f_{2005} 也满足条件.

例 16 （第 44 届 IMO 预选题）设 $\mathbf{R}^+$ 为正实数集，求所有函数 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$，满足条件

(1) 对于所有 x、y、$z\in\mathbf{R}^+$，有

$$f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z)=f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx});$$

(2) 对于所有 $1\leqslant x<y$，有 $f(x)<f(y)$.

解 我们证明 $f(x)=x^{\lambda}+x^{-\lambda}$ 满足条件，其中 λ 是任意正实数. 为此，先证明一个引理.

引理 存在唯一的函数 $g:[1,+\infty)\to[1,+\infty)$，使得

$$f(x)=g(x)+\frac{1}{g(x)}.$$

引理证明：设 $x=y=z=1$，则条件(1)化为 $4f(1)=f^3(1)$. 因为 $f(1)>0$，所以，$f(1)=2$.

定义函数 $A:[1,+\infty)\to[2,+\infty)$ 为 $A(x)=x+\frac{1}{x}$. 因为 $f(x)(x\in[1,+\infty))$ 是严格递增函数，且 A 是双射，所以，函数 $g(x)$ 是唯一确定的.

因为 A 是严格递增的，所以，g 也严格递增. 由 $f(1)=2$ 知 $g(1)=1$.

设 $(x,y,z)=\left(t,t,\frac{1}{t}\right)$，则 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$；

设 $(x,y,z)=(t^2,1,1)$，则 $f(t^2)=f^2(t)-2$；

设 $(x,y,z)=\left(\frac{s}{t},\frac{t}{s},st\right)$，则 $f(st)+f\left(\frac{t}{s}\right)=f(s)f(t)$；

设 $(x,y,z)=\left(s^2,\frac{1}{s^2},t^2\right)$，则 $f(st)f\left(\frac{t}{s}\right)=f(s^2)+f(t^2)$

$$=f^2(s)+f^2(t)-4.$$

设 $1\leqslant x\leqslant y$，下面证明 $g(xy)=g(x)g(y)$.

因为 $f(xy)+f\left(\frac{y}{x}\right)=\left[g(x)+\frac{1}{g(x)}\right]\left[g(y)+\frac{1}{g(y)}\right]$

$$=\left[g(x)g(y)+\frac{1}{g(x)g(y)}\right]+\left[\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{g(y)}{g(x)}\right],$$

$$f(xy)\cdot f\left(\frac{y}{x}\right)=\left[g(x)+\frac{1}{g(x)}\right]^2+\left[g(y)+\frac{1}{g(y)}\right]^2-4$$

$$=\left[g(x)g(y)+\frac{1}{g(x)g(y)}\right]\left[\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{g(y)}{g(x)}\right],$$

于是，$\left\{f(xy),f\left(\frac{y}{x}\right)\right\}=\left\{g(x)g(y)+\frac{1}{g(x)g(y)},\frac{g(x)}{g(y)}+\frac{g(y)}{g(x)}\right\}$，



$$=\left\{A(g(x)g(y)),\ A\left(\frac{g(y)}{g(x)}\right)\right\}.$$

因为 $f(xy)=A(g(xy))$，且 A 是双射，于是 $g(xy)=g(x)g(y)$ 或 $g(xy)=\frac{g(y)}{g(x)}$.

又因为 $xy\geqslant y$ 且 g 是递增的，所以，

$$g(xy)=g(x)g(y).$$

对于一个确定的实数 $\varepsilon>1$，假设 $g(\varepsilon)=\varepsilon^{\lambda}$.

因为 $g(\varepsilon)>1$，所以 $\lambda>0$.

于是，对所有有理数 $q(q\in[0,+\infty))$，有 $g(\varepsilon^{q})=g^{q}(\varepsilon)=\varepsilon^{\lambda q}$.

因为 g 是严格递增的，所以，对所有 $t\in[0,+\infty)$，$g(\varepsilon^{t})=\varepsilon^{\lambda t}$. 从而，当 $x\geqslant1$ 时，$g(x)=x^{\lambda}$.

于是，当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=x^{\lambda}+x^{-\lambda}$. 由 $f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$，有

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=x^{\lambda}+x^{-\lambda}$.

下面验证对于所有的 $\lambda(\lambda>0)$，函数 $f(x)=x^{\lambda}+x^{-\lambda}$ 满足两个给定的条件.

因为 $f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$

$$\begin{aligned}&=\left[(xy)^{\frac{\lambda}{2}}+(xy)^{-\frac{\lambda}{2}}\right]\left[(yz)^{\frac{\lambda}{2}}+(yz)^{-\frac{\lambda}{2}}\right]\left[(zx)^{\frac{\lambda}{2}}+(zx)^{-\frac{\lambda}{2}}\right]\\&=(xyz)^{\lambda}+x^{\lambda}+y^{\lambda}+z^{\lambda}+x^{-\lambda}+y^{-\lambda}+z^{-\lambda}+(xyz)^{-\lambda}\\&=f(xyz)+f(x)+f(y)+f(z).\end{aligned}$$

当 $1\leqslant x<y$ 时，

$$f(y)-f(x)=y^{\lambda}+y^{-\lambda}-x^{\lambda}-x^{-\lambda}=(y^{\lambda}-x^{\lambda})\left[1-\frac{1}{(xy)^{\lambda}}\right]>0.$$

所以，$f(x)=x^{\lambda}+x^{-\lambda}(\lambda>0)$ 满足条件.

能力训练 A

1. $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 $f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$ 是 $a+b>0$ 的(　　)条件

A. 充分不必要　　B. 必要不充分

C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

2. 偶函数 $f(x)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，则下列不等式成立的是(　　)

A. $f\left(-\frac{3}{4}\right)>f(a^{2}-a+1)$.　　B. $f\left(-\frac{3}{4}\right)\geqslant f(a^{2}-a+1)$.

C. $f\left(-\frac{3}{4}\right)<f(a^{2}-a+1)$.　　D. $f\left(-\frac{3}{4}\right)\leqslant f(a^{2}-a+1)$.



3. 定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇函数$f(x)$为增函数,偶函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的图象与$f(x)$的图象重合,设$a>b>0$,给出下列不等式

① $f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$　　② $f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$

③ $f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$　　④ $f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$

其中成立的是 (　　)

A. ①与③　　B. ②与③　　C. ①与④　　D. ②与④

4. 若定义在R上的减函数$y=f(x)$,对于任意的$x,y\in \mathbf{R}$,不等式$f(x^2-2x)\leqslant -f(2y-y^2)$成立,且函数$y=f(x-1)$的图象关于点$(1,0)$对称,则当$1\leqslant x\leqslant 4$时,$\dfrac{y}{x}$的取值范围是 (　　)

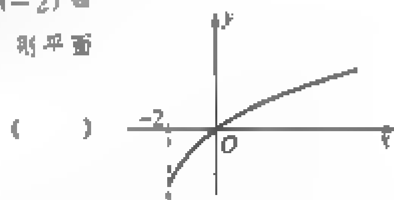
A. $\left[-\dfrac{1}{4},1\right)$　　B. $\left[-\dfrac{1}{4},1\right]$　　C. $\left(-\dfrac{1}{2},1\right]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

5. (2007年陕西省高考卷理科第11题)$f(x)$是定义在$(0,+\infty)$上的非负可导函数,且满足$xf'(x)+f(x)\leqslant 0$,对任意正数a、b,若$a<b$,则必有 (　　)

A. $af(a)\leqslant f(b)$　　B. $bf(b)\leqslant f(a)$

C. $af(b)\leqslant bf(a)$　　D. $bf(a)\leqslant af(b)$

6. 已知函数$f(x)$的定义域为$[-2,+\infty)$,且$f(4)=f(-2)=1$,$f'(x)$为$f(x)$的导函数,函数$y=f'(x)$的图象如右图所示.则平面区域$\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0,\\ f(2a+b)<1\end{cases}$所围成的面积是 (　　)



A. 2　　B. 4

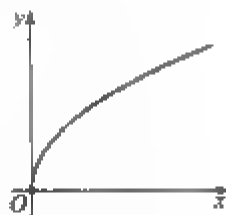
C. 5　　D. 8

7. 设$f(x)$、$g(x)$是R上的可导函数,$f'(x)$、$g'(x)$分别为$f(x)$、$g(x)$的导函数,且$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$,则当$a<x<b$时,有 (　　)

A. $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　B. $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　D. $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

8. 函数$f(x)$的图像如右图所示,下列数值排序正确的是 (　　)



A. $0<f'(2)<f'(3)<f(3)-f(2)$

B. $0<f'(3)<f(3)-f(2)<f'(2)$

C. $0<f'(3)<f'(2)<f(3)-f(2)$

D. $0<f(3)-f(2)<f'(2)<f'(3)$

9. 设$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,且对所有正整数$n$,有$f(n+1)>f(n)$,$f(f(n))=3n$,$f(1997)$的值为 (　　)

A. 1997　　B. 1268　　C. 3804　　D. 5991



10．(第1届"希望杯"高二年级第2试第3题) f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 上的一一映射，函数 $y=f(x)$ 严格递增，不等式 $x>f(x)$ 的解集为 P，不等式 $x>f[f(x)]$ 的解集为 Q，则（　　）

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $P=Q$　　C. $Q\subsetneqq P$　　D. $P\subsetneqq Q$ 且 $Q\subsetneqq P$

11．对于函数 $f(x)$ 定义域中任意 $x_1, x_2\ (x_1\neq x_2)$ 有如下结论：

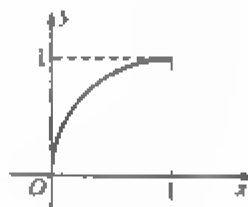
① $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$　② $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$

③ $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$　④ $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)>\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

当 $f(x)=10^x$ 时，上述结论中正确结论的序号是______

12．当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f'(x)<0$，且 $f(3)=0$，则不等式 $(x-1)f(x+1)>0$ 的解集是______

13．已知定义在区间 $[0,1]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像如右图所示，对于满足 $0<x_1<x_2<1$ 的任意 x_1、x_2，给出下列结论



① $f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$；

② $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$；

③ $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

其中正确结论的序号是______（把所有正确结论的序号都填上）

14．已知函数 $f(x)$ 同时满足下列五个条件：

① $f(x+1)$ 的定义域是 $[-5,3]$；② $f(x)+f(-x)=0$；③ $f(-1)=0$；④ 在 $[-4,0)$ 上单调递减；⑤ 没有最大值.

则不等式 $x^3f(x)\leqslant 0$ 的解集是______.

15．(福州市第28届高中数学竞赛试题) $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，且 $f(1+x)+f(1-x)=f(1)$，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，则 $-f\left(\dfrac{10}{3}\right)$、$f\left(-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$、$f\left(\dfrac{9}{2}\right)$ 从小到大排列为______

16．已知函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 单调递增，且对任意实数 x 恒有 $f(2+x)=f(2-x)$，若 $f(1-2x^2)<f(1+2x-x^2)$，则 x 的取值范围是______.

17．设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上连续，对任意正数 x，$f(x^2)\geqslant f(x)$，且 $f(1)=5$，求证：$f(x)\geqslant 5$

18．设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)$ 且存在反函数，求证：

(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$；

(2) 若在某区间 (a,b) 内 $f'(x)>0$，$(0<a<b)$，则 $f^{-1}(x)$ 是单调递增函数

19．设 $f(x)$ 是满足下列条件的函数：

(1) 若 $x>y$ 且 $f(x)+x\geqslant w\geqslant f(y)+y$，则存在实数 $z\in[y,x]$，使得 $f(z)=w-z$；

(2) 方程 $f(x)=0$ 至少有一个解，并在该方程的解中存在一个解不大于所有其他的解；



(3) $f(0)=1$；

(4) $f(-2007)\leqslant 2008$；

(5) $f(x)f(y)=f[xf(y)+yf(x)+xy]$.

试求：$f(-2007)$ 的值.

20 (1993 年美国数学奥林匹克试题) 函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 满足：

(1) 对任意 $x\in[0,1]$，$f(x)\geqslant 0$；

(2) $f(1)=1$；

(3) 当 x，y，$x+y\in[0,1]$ 时，$f(x)+f(y)\leqslant f(x+y)$.

试求(并证明)：最小的常数 c，使得对于满足性质(1)～(3)的每个函数 f 及每个 $x\in[0,1]$，均有 $f(x)\leqslant cx$.

21 (2003 年英国数学奥林匹克竞赛题改编) 设 f 是从非负整数集到自身的函数，对所有 $n\geqslant 0$，满足

(1) $[f(2n+1)]^2-[f(2n)]^2=6f(n)+1$；

(2) $f(2n)\geqslant f(n)$.

问在 f 的值域中，满足小于 2008 的数有多少个？

22 (2003 年英国数学奥林匹克竞赛题) 设 $\mathbf{N}$ 为正整数集，$f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{N}$ 的一个排列.

(1) 证明：存在一个由正整数构成的等差数列 a、$a+d$、$a+2d$，其中 $d>0$，使得

$$f(a)<f(a+d)<f(a+2d)；$$

(2) 是否一定存在正整数 a，$a+d$，…，$a+2003d$，其中 $d>0$，使得

$$f(a)<f(a+d)<\cdots<f(a+2003d)?$$

23 (2005 年泛非数学奥林匹克竞赛试题) 函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 满足：对任意 a，$b\in\mathbf{Z}$ 且 $ab\neq 0$，恒有 $f(ab)\geqslant f(a)+f(b)$.

证明：对任意 $a\in\mathbf{Z}$ 且 $a\neq 0$，$n\in\mathbf{N}$，当且仅当 $f(a^2)=2f(a)$ 时有 $f(a^n)=nf(a)$.

24 (1996 年国家队选拔赛试题) 设 $\mathbf{N}^{+}$ 是正整数集，$\mathbf{R}$ 是实数集，S 是满足以下两个条件的函数 $f:\mathbf{N}^{+}\to\mathbf{R}$ 的集合：

① $f(1)=2$；

② $f(n+1)\geqslant f(n)\geqslant \dfrac{n}{n+1}f(2n)$ $(n=1,2,\cdots)$.

试求最小的正整数 M，使得对任何 $f\in S$ 及任何 $n\in\mathbf{N}^{+}$，都有 $f(n)<M$.

25 (2003 年白俄罗斯数学奥林匹克试题) 设 $Q_1=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\geqslant 1\}$，函数 $f:Q_1\to\mathbf{R}$ 满足对于任意的 x、$y\in Q_1$，不等式 $|f(x+y)-f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 成立，其中 $\varepsilon>0$ 是一个实数.

证明：存在实数 q，对所有实数 $x\in Q_1$，满足 $\left|\dfrac{f(x)}{x}-q\right|<2\varepsilon$.



第[illegible]讲 函数不等式的证明

知识扫描

在一些数学竞赛中，常常出现有关函数不等式的试题，通常是给出某种函数（未知函数）相等或不等，或其他条件，证明另外的函数不等式成立。由于不等式问题本身就是难度较大的问题，加上与函数不等关系相结合，使得有关函数不等式的证明难度更大，题目更抽象。解决这类问题除了要用不等式证明的常用方法和技巧外，还要根据所给函数关系式的结构特征，充分利用处理函数方程和函数不等式的一些特殊技巧，如代换、递推、反证、归纳、调整、特殊化、取极限、数学变换等。下面通过实例，介绍证明函数不等式的常用思考方法。

例题分析

例1 设$f(x)$满足$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ $(x_1>0, x_2>0)$且有反函数，求证：$f^{-1}(x_1)+f^{-1}(x_2)\geqslant 2f^{-1}\left(\frac{x_1}{2}\right)f^{-1}\left(\frac{x_2}{2}\right)$。

解 因为$f(x)$有反函数，$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，

令 $f(x_1)=u_1$，$f(x_2)=u_2$，则

$$x_1=f^{-1}(u_1),\ x_2=f^{-1}(u_2).$$

所以 $f[f^{-1}(u_1)f^{-1}(u_2)]=u_1+u_2$，

所以 $f^{-1}(u_1)f^{-1}(u_2)=f^{-1}(u_1+u_2)$

所以 $f^{-1}(x_1)+f^{-1}(x_2)=\left[f^{-1}\left(\frac{x_1}{2}\right)\right]^2+\left[f^{-1}\left(\frac{x_2}{2}\right)\right]^2$

$$\geqslant 2f^{-1}\left(\frac{x_1}{2}\right)f^{-1}\left(\frac{x_2}{2}\right)$$

例 2 设正值函数 $f(x)$ 定义在 $D(\subseteq \mathbf{R}^+)$ 上，且对任意 x_1、$x_2 \in D$，恒有

$$f(\sqrt{x_1 x_2}) \leqslant \sqrt{f(x_1) f(x_2)}, \qquad ①$$

$$f^2(x_1) + f^2(x_2) \geqslant 2f^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right). \qquad ②$$

求证：$f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

证 利用已知的两个不等式

$$\begin{aligned}[f(x_1) + f(x_2)]^2 &= f^2(x_1) + f^2(x_2) + 2f(x_1) f(x_2)\\ &\geqslant 2f^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right) + 2f^2(\sqrt{x_1 x_2})\\ &= 2\left[f^2\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right) + f^2(\sqrt{x_1 x_2})\right]\\ &\geqslant 4f^2\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}}\right)^2 + (\sqrt{x_1 x_2})^2\right]}\right)\\ &= 4f^2\left(\sqrt{\frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2}\right)\\ &= 4f^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right).\end{aligned}$$

所以 $f(x_1) + f(x_2) \geqslant 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

说明 仅满足 ① 式的函数通常称为 D 上的几何凸函数，仅满足 ② 式的函数通常称为 D 上的平方凸函数.

例 3 已知 $f(x)$ 是定义在正整数集 $\mathbf{N}^+$ 上的函数，满足 $f(1) = \frac{3}{2}$，且对任意的 x、$y \in \mathbf{N}^+$，有

$$f(x + y) \geqslant \left(1 + \frac{y}{x + 1}\right) f(x) + \left(1 + \frac{x}{y + 1}\right) f(y) + x^2 y + xy + xy^2.$$

求证：$f(x) \geqslant \frac{1}{4} x(x + 1)(2x + 1)$，$x \in \mathbf{N}^+$.

证明 所给不等式中令 $y = 1$，并利用 $f(1) = \frac{3}{2}$ 得

$$f(x + 1) \geqslant \left(1 + \frac{1}{x + 1}\right) f(x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} + x^2 + 2x.$$



整理后，得$\dfrac{f(x+1)}{x+2}-\dfrac{f(x)}{x+1}\geqslant x+\dfrac{3}{4}$.

令 $x=1, 2, 3, \cdots, n-1$，得

$$\frac{f(2)}{3}-\frac{f(1)}{2}\geqslant 1+\frac{3}{4},$$

$$\frac{f(3)}{4}-\frac{f(2)}{3}\geqslant 2+\frac{3}{4},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{f(n)}{n+1}-\frac{f(n-1)}{n}\geqslant (n-1)+\frac{3}{4}$$

将上述各式相加，得

$$\frac{f(n)}{n+1}-\frac{f(1)}{2}\geqslant[1+2+\cdots+(n-1)]+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{3}{4}(n-1)$$

$$=\frac{1}{4}(n-1)(2n+3).$$

以 $f(1)=\dfrac{3}{2}$ 代入后，经过整理得 $f(n)\geqslant\dfrac{1}{4}n(n+1)(2n+1)$.

所以
$$f(x)\geqslant\frac{1}{4}x(x+1)(2x+1)\ (x\in\mathbf{N}^*).$$

评析 当 $f(x)$ 是定义在正整数集 $\mathbf{N}^*$（或记为 $\mathbf{Z}^+$）上的函数时，可根据题给递推不等式，通过取特殊值得到关于 $f(n)$ 的不等递推关系，然后用递推法推证不等式

例 4 （2004 年泰国数学奥林匹克竞赛题）设函数 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$，满足

(1) $f(0)=f(1)=0$；

(2) 对所有的 $x, y\in[0,1]$，且 $x\neq y$，$|f(x)-f(y)|<|x-y|$

证明：对所有的 $x, y\in[0,1]$，$|f(x)-f(y)|<\dfrac{1}{2}$.

证法 1 对所有的 $x\in[0,1]$ 有

$$|f(x)|=|f(x)-f(0)|<|x-0|=x,$$

$$|f(x)|=|f(x)-f(1)|<|x-1|=1-x$$

因此对所有的 $x\in[0,1]$，有

$$|f(x)|<\min\{x, 1-x\}.$$

下面证明，对所有的 $x, y\in[0,1]$，有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{1}{2}$$



若 $|x-y|\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|\leqslant\frac{1}{2}$$

若 $|x-y|>\frac{1}{2}$，假设

$$\frac{1}{2}<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y<\frac{1}{2},$$

则 $|f(x)|<\min\{x,1-x\}=1-x$，

$$|f(y)|<\min\{y,1-y\}=y,$$

故 $|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)|+|f(y)|=1-x+y=1-(x-y)<\frac{1}{2}$。

证法2 若 $|x_1-x_2|\leqslant\frac{1}{2}$，

因为 $$|f(x_2)-f(x_1)|<|x_1-x_2|,$$

所以 $|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}$ 显然成立。

若 $|x_1-x_2|>\frac{1}{2}$，

则令 $$1\geqslant x_1>x_2\geqslant 0,$$

又因为 $$f(0)=f(1),$$

所以 $|f(x_2)-f(x_1)|$

$=|f(x_2)-f(0)+f(1)-f(x_1)|$

$\leqslant|f(x_2)-f(0)|+|f(1)-f(x_1)|$

$<x_2-0+1-x_1$

$=1-(x_1-x_2)<\frac{1}{2}$，

所以 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{1}{2}$。

这是此题的常规证法，利用的是绝对值不等式的性质，深入思考，可发现其中蕴含的几何意义，通过构造图形找到新的证法：

证法3 因为 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$，

所以 $$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|<1,$$



即 $y=f(x)$ 图象上任意两点连线斜率 k 满足 $|k|<1$，所以 $y=f(x)$ 图象中所有点必框定在如图 5-1 所示的边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形区域内．设图象中最高点为 $E(x_a, y_a)$，最低点为 $F(x_b, y_b)$，则 $|k_{EF}|<1$，连接 EF，交 OB 于点 P，延长 FE、EF 分别交 OA、BC 于 G、H．过点 P 作 AB 的平行线分别交 OA、BC 于 M、N，过点 E、F、G、H、M、N 作 OB 的垂线，垂足分别为 E'、F'、G'、H'、M'、N'，则

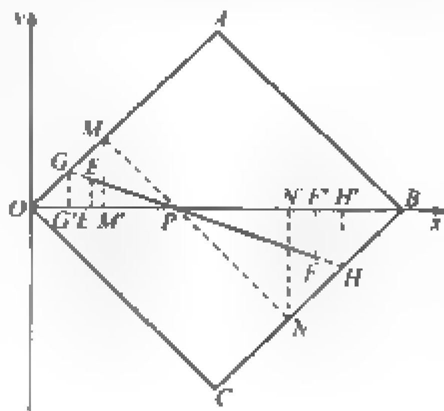


图 5-1

$$
\begin{aligned}
f(x_a)-f(x_b) &< |GG'|+|HH'| \\
&< |MM'|+|NN'| \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(|PM|+|PN|) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}|MN| = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

因为 E、F 分别为 $y=f(x)$ 图象中的最高点和最低点，所以 $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant f(x_a)-f(x_b)<\frac{1}{2}$.

例 5 若 $f(x)$ 是定义在集 D 上的增函数，且对任意的 $x\in D$，有 $f(x)\in D$，则 $f_n(x) \vee x$ 与 $f(x) \vee x$ 同解（这里 $f_n(x)$ 是 $\underbrace{f\{f[\cdots(f(x))]\}}_{n个}$ 的简记；"$\vee$"表示"$=$"，"$\leqslant$"，"$\geqslant$"，"$<$"，"$>$"五个符号之一）

证明 这里只给出 $f_n(x)>x \Leftrightarrow f(x)>x$ 的证明，其他情况类似，证明从略．

因 $f(x)$ 是增函数，易知，

$$
\begin{aligned}
f(x)>x &\Rightarrow f_2(x)=f[f(x)]>f(x)>x, \\
&\Rightarrow f_3(x)=f[f_2(x)]>f(x)>x, \\
&\Rightarrow \cdots \\
&\Rightarrow f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]>f(x)>x.
\end{aligned}
$$

反之，若 $f(x)\leqslant x$，则

$$
\begin{aligned}
&f_2(x)=f[f(x)]\leqslant f(x)\leqslant x, \\
&f_3(x)=f[f_2(x)]\leqslant f(x)\leqslant x, \\
&\cdots \\
&f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]\leqslant f(x)\leqslant x
\end{aligned}
$$

所以 $f_n(x)>x \Leftrightarrow f(x)>x$

说明 当 $f(x)$ 是减函数时，$f[f(x)]$ 是增函数，故由定理可得

若 $f(x)$ 是定义在集合 D 上的减函数，且对任意的 $x\in D$，有 $f(x)\in D$，则 $f_n(x)\geqslant x$ 与 $f_2(x)\geqslant x$ 同解.

利用例 5 结论可求解不等式 $\underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n}x\geqslant x$ $(n\geqslant 2,\ x\geqslant 0)$.

解 易知 $|x|\leqslant 1$. 令 $f(x)=\sin x$，$x\in[-1,1]$，则 $f(x)$ 是增函数，所给不等式 $f_n(x)\geqslant x$ 等价于 $f(x)\geqslant x$，即 $\sin x\geqslant x$. 又 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$\sin x\leqslant x$，所以 $\sin x=x$，解之可得唯一解 $x=0$.

又如解不等式 $(x^3+6)^3+6>x$.

解 令 $f(x)=x^3+6$，则 $f(x)$ 是实数集 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所给不等式 $f[f(x)]>x$ 与 $f(x)>x$ 即 $x^3+6>x$ 同解. 因为

$$x^3+6-x=(x^3+8)-(x+2)=(x+2)[(x-1)^2+2]>0,$$

所以原不等式解为 $x>-2$.

例 6 设(1) $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$

(2) 当 $x>x_0$ 时，$f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$

则当 $x>x_0$ 时，$f(x)>g(x)$

证 由 $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$，知

$$[f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)]'>0,$$

于是 $f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)$ 是严格递增函数.

对 $x>x_0$，有

$$f^{(n-1)}(x)-g^{(n-1)}(x)>f^{(n-1)}(x_0)-g^{(n-1)}(x_0),$$

即 $f^{(n-1)}(x)>g^{(n-1)}(x)$.

继续用上面的方法，由上式及 $f^{(n-2)}(x_0)=g^{(n-2)}(x_0)$ 可推出 $f^{(n-2)}(x)>g^{(n-2)}(x)$，…，最后由 $f'(x)>g'(x)$ 及 $f(x_0)=g(x_0)$，可推出

$$f(x)>g(x).$$

例 7 (2006 年女子数学奥林匹克试题改编) 设 $a>0$，连续函数 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$，满足 $f(a)=1$，如果对任意 x、$y\in\mathbf{R}^+$，都有

$$f(x)f(y)+f\left(\frac{a}{x}\right)f\left(\frac{a}{y}\right)\leqslant 2f(xy). \qquad ①$$

求证：$f(x)f(y)\leqslant f(xy)$.

证明 在式 ① 中取 $x=y=\sqrt{t}$，得

$$f^2(\sqrt{t})+f^2\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\leqslant 2f(t).$$

所以，$f(t)\geqslant 0$



在式①中令 $x=y=1$，得

$$f^2(1)+f^2(a)\leqslant 2f(1),\ [f(1)-1]^2=0.$$

则 $f(1)=1$。

在式①中令 $y=1$，得

$$f(x)f(1)+f\left(\frac{a}{x}\right)f(a)\leqslant 2f(x),$$

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a}{x}\right)\ (x>0). \tag{②}$$

在式②中取 $y=\frac{a}{x}$，则 $y\in \mathbf{R}^+$，得

$$f\left(\frac{a}{y}\right)\geqslant f(y).$$

即

$$f\left(\frac{a}{x}\right)\geqslant f(x). \tag{③}$$

由式②、③得

$$f\left(\frac{a}{x}\right)=f(x). \tag{④}$$

在式①中取 $y=\frac{a}{x}$，得

$$f(x)f\left(\frac{a}{x}\right)+f\left(\frac{a}{x}\right)f(x)\leqslant 2f(a).$$

即 $f(x)f\left(\frac{a}{x}\right)\leqslant 1$. $\quad$ ⑤

由式④、⑤得 $f^2(x)\leqslant 1\ (x>0)$，

即 $0\leqslant f(x)\leqslant 1\ (x>0)$。

由式④，式①可化为

$$f(x)f(y)\leqslant f(xy). \tag{⑥}$$

说明　满足题意的一个模特函数是

$$f(x)=x^{\alpha},\ x\in \mathbf{R}^+,\ \alpha\in \mathbf{R}.$$

例8　(2003年北京市高考理科试题)设 $y=f(x)$ 是定义在区间$[-1,1]$上的函数，且满足条件：① $f(-1)=f(1)=0$；② 对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$.

(1) 证明：对任意的 $x\in[-1,1]$，都有 $x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x$；

(2) 证明：对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant 1$；

(3) 在区间$[-1,1]$上是否存在满足题设条件的奇函数 $y=f(x)$，且使得

$$\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|, & u,v\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ |f(u)-f(v)|=|u-v|, & u,v\in\left[\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$



若存在，请举一例；若不存在，请说明理由.

分析 第(1)小题和第(2)小题是关于函数不等式的证明题.由于所给函数的单调性不明了，题设中又给出了一个条件不等式，故可考虑利用题设条件及所隐含的有关性质进行分析证明.第(3)小题是一个存在性问题，一般可先用特殊值进行试探，初显端倪后再进行论证.

解 (1) 由题设条件可知，当 $x\in[-1,1]$ 时，有

$$|f(x)|=|f(x)-f(1)|\leqslant|x-1|=1-x,$$

即

$$x-1\leqslant f(x)\leqslant 1-x.$$

(2) **证法1** 对任意的 $u,v\in[-1,1]$，当 $|u-v|\leqslant1$ 时，有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|\leqslant1$；当 $|u-v|>1$ 时，$u\cdot v<0$，不妨设 $u<0$，则

$$v>0 \text{ 且 } v-u>1.$$

所以

$$\begin{aligned}|f(u)-f(v)|&\leqslant|f(u)-f(-1)|+|f(v)-f(1)|\\&\leqslant|u+1|+|v-1|=1+u+1-v\\&=2-(v-u)<1.\end{aligned}$$

综上所述，对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有

$$|f(u)-f(v)|\leqslant1.$$

证法2 由第(1)小题可知，当 $x\in[0,1]$ 时，$|f(x)|\leqslant1-x$；当 $x\in[-1,0]$ 时，

$$|f(x)|=|f(x)-f(-1)|\leqslant1+x=1-|x|.$$

所以当 $x\in[-1,1]$ 时，

$$|f(x)|\leqslant1-|x|.$$

因此，对任意的 $u,v\in[-1,1]$，当 $|u-v|\leqslant1$ 时，

$$|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|\leqslant1;$$

当 $|u-v|>1$ 时，

$$u\cdot v<0 \text{ 且 } 1<|u-v|=|u|+|v|\leqslant2.$$

故

$$\begin{aligned}|f(u)-f(v)|&\leqslant|f(u)|+|f(v)|\leqslant1-|u|+1-|v|\\&=2-(|u|+|v|)\leqslant1.\end{aligned}$$

综上所述，对任意的 $u,v\in[-1,1]$，都有

$$|f(u)-f(v)|\leqslant1.$$

(3) 满足所述条件的函数不存在.

假设存在函数 $f(x)$ 满足条件，则由 $|f(u)-f(v)|=|u-v|$，$u,v\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，得



$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(1)\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2} \quad ①$$

因为 $f(1)=0$,所以

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{2} \quad ②$$

又因为 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(0)=0$. 由条件 $|f(u)-f(v)|<|u-v|$, $u, v\in\left[0, \frac{1}{2}\right]$,得

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)\right|<\frac{1}{2}. \quad ③$$

式②与式③矛盾,即假设不成立,故这样的函数不存在.

评析 此题涉及不等式与存在性的问题.解(证)函数不等式,若问题可转化为几个关于"f"函数值的大小问题,一般可先探究其单调性,设法"脱去"函数关系中 f 这一层"外衣",将函数值的不等关系转化为自变量的不等关系,从而达到求解(证)的目的.若不是单调函数,则需根据题设条件,做到具体问题具体分析.本题是以压缩映象原理为背景命题的,主要是考查函数、不等式等基本知识,考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

例9 设 $P(x)$ 为实系数多项式,且满足

$$P(0)>0,\ P(1)>P(0),\ P(2)>2P(1)-P(0),$$
$$P(3)>3P(2)-3P(1)+P(0),$$

并且对一切正整数 n,有

$$P(n+4)>4P(n+3)-6P(n+2)+4P(n+1)-P(n)$$

试证明:对每一 $n\in\mathbf{N}^*$, $P(n)>0$.

证明 令 $Q(n)=P(n+1)-P(n)$,

$R(n)=Q(n+1)-Q(n)$, $S(n)=R(n+1)-R(n)$,则 $Q(n+3)>3Q(n+2)-3Q(n+1)+Q(n)$,

从而 $R(n+2)>2R(n+1)-R(n)$, $S(n+1)>S(n)$,故 $S(n)$ 递增.由已知 $S(0)>0$, $P(0)>0$, $S(0)>0$, $R(0)>0$,故 $S(n)>0$,从而 $R(n)$ 递增,$R(n)>0$ 导出 $Q(n)$ 递增,$Q(n)>0$,最后 $P(n)$ 递增,$P(n)>P(0)>0$.

例10 (第13届罗马尼亚数学奥林匹克竞赛试题(决赛))设 $I\subsetneq\mathbf{R}$ 是一个区间,$f: I\to\mathbf{R}$ 是一个函数,且不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$ 对所有 $x, y\in I$ 成立.证明:f 在 I 上是单调函数的充要条件是:对于所有的 $x, y\in I$,要么 $f(x)\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(y)$,要么 $f(y)\leqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right)\leqslant f(x)$.

证明 若 f 在区间 I 上不是单调函数，则存在 $x<y<z\ (x,y,z\in I)$，使得

$$f(x)<f(y)>f(z) \text{ 或 } f(x)>f(y)<f(z).$$

不失一般性，下面考虑 $f(x)<f(y)>f(z)$ 的情形.

设 $\lambda\in\mathbf{R}$，且满足 $f(x)<\lambda$，$f(z)<\lambda$，$f(y)>\lambda$. 考虑 $I_0=[x,z]$ 的中点，则 y 属于 $\left[x,\frac{x+z}{2}\right]$，$\left[\frac{x+z}{2},z\right]$ 之一，设这个区间为 $I_1=[a_1,b_1]$，即 $y\in I_1$.

因为 $f\left(\frac{x+z}{2}\right)<\lambda$，区间 I_1 的中点值也小于 λ，考虑由 I_1 的中点将 I_1 分成的两个区间中包含 y 的区间，并设其为 $I_2=[a_2,b_2]$ 等等，可得区间 $I_n=[a_n,b_n]$，n 为正整数，且满足

$$f(a_n)>\lambda,\ f(b_n)<\lambda,\ y\in I_n,\ b_n-a_n=\frac{z-x}{2^n}.$$

由于 $|f(y)-f(a_n)|\leqslant|a_n-y|<\frac{z-x}{2^n}$，

所以，$f(y)<f(a_n)+\frac{z-x}{2^n}<\lambda+\frac{z-x}{2^n}$ 对所有的正整数 n 成立，矛盾.

反之显然成立.

说明 解题关键是利用极限思想等分区间.

例 11 设函数 $f(x)$ 对于区间 (a,b)（注：这里的区间可以是开的、闭的或半开半闭的）中的任意两组值 x_1，x_2 与 y_1，y_2，$x_1+x_2=y_1+y_2$，具有性质：

$$f(x_1)+f(x_2)<f(y_1)+f(y_2) \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow |y_1-y_2|<|x_1-x_2|.$$

则对于 (a,b) 中的任一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right), \tag{2}$$

且②式中等号成立 $\Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明 先证不等式②. 对于任意给定的一组值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，记 $a=x_1+x_2+\cdots+x_n$，则 $\frac{a}{n}\in(a,b)$. 若 x_i 都相等，则②式中等号成立，故我们考虑 x_i 不全相等的情形. 为此不妨设

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n，则\ x_1<x_n，x_1<\frac{a}{n}<x_n. 令\ \bar{x}_1=\frac{a}{n}，\bar{x}_n=x_1+x_n-\frac{a}{n}，$$

$$\bar{x}_i=x_i\ (i=2,3,\cdots,n-1)$$

则 $\bar{x}_i\ (i=1,2,\cdots,n)\in(a,b)$，且 $\bar{x}_1+\bar{x}_n=x_1+x_n$.

由于 $|\bar{x}_n-\bar{x}_1|=\left|\left(x_1+x_n-\frac{a}{n}\right)-\frac{a}{n}\right|=\left|\left(x_n-\frac{a}{n}\right)-\left(\frac{a}{n}-x_1\right)\right|<\left|x_n-\frac{a}{n}\right|+$



$\left|\frac{a}{n}-x_1'\right| = \left(x_n-\frac{a}{n}\right)-\left(\frac{a}{n}-x_1\right)=x_n-x_1=|x_n-x_1|$，故由假设知，$f(x_1)+f(x_n)<f(x_1')+f(x_n')$，

从而
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) < \sum_{i=1}^{n} f(x_i').$$

对于 x_1'，…，x_n'，若它们还不全相等，则可继续使用上法. 最后，至多重复 $n-1$ 步，可得
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) < \sum_{i=1}^{n} f(x_i') < \cdots < \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{a}{n}\right) = nf\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right).$$

说明 设 $f(x)$ 是恒正的，令 $F(x)=\lg f(x)$，对 $F(x)$ 应用刚才证明的不等式，可得如下函数不等式：

若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上是恒正的，且对于 (a,b) 中的 x_1，x_2，y_1，y_2，$x_1+x_2=y_1+y_2$，具有性质：
$$f(x_1)f(x_2)<f(y_1)f(y_2)$$
$$\Leftrightarrow |y_1-y_2|<|x_1-x_2| \qquad ①'$$

则对于 (a,b) 中的任一组值 x_1，x_2，…，x_n 有
$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\leqslant\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\right]^n. \qquad ②'$$

且 ②′ 式中等号成立 $\Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$.

若不等式 ①′ 与 ① 中的不等号反向，则 ② 与 ②′ 式中的不等号也反向.

例 12 （2008 年全国高中联合竞赛湖北省预赛试题）设数列 $\{f(n)\}$ 满足：$f(1)=1$，$f(2)=2$，$\frac{f(n+2)}{f(n)}=\frac{f^2(n+1)+1}{f^2(n)+1}$ $(n\geqslant 1)$.

(1) 求 $f(n+1)$ 与 $f(n)$ 之间的递推关系式 $f(n+1)=g[f(n)]$；

(2) 证明：$63<f(2008)<78$.

解 (1) 由于 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$\frac{f(n+2)}{f(n)}=\frac{f^2(n+1)+1}{f^2(n)+1}$ $(n\geqslant 1)$，易知对一切 $n\geqslant 1$，$f(n)\neq 0$.

当 $n\geqslant 1$ 时，由 $\frac{f(n+2)}{f(n)}=\frac{f^2(n+1)+1}{f^2(n)+1}$ 可得 $\frac{f(n+2)f(n+1)}{f^2(n+1)+1}=\frac{f(n+1)f(n)}{f^2(n)+1}$，从而
$$\frac{f(n+2)}{f(n+1)+\frac{1}{f(n+1)}}=\frac{f(n+1)}{f(n)+\frac{1}{f(n)}}.$$

依次利用上述关系式，可得 $\frac{f(n+1)}{f(n)+\frac{1}{f(n)}}=\frac{f(n)}{f(n-1)+\frac{1}{f(n-1)}}=\frac{f(n-1)}{f(n-2)+\frac{1}{f(n-2)}}=$



$\cdots=\dfrac{f(2)}{f(1)+\dfrac{1}{f(1)}}=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{1}}=1$，从而 $f(n+1)=f(n)+\dfrac{1}{f(n)}$.

(2) 显然，由 $f(1)=1$ 及 $f(n+1)=f(n)+\dfrac{1}{f(n)}(n\geqslant 1)$ 可知，对一切 $n\geqslant 1$，有 $f(n)\geqslant 1$ 成立，从而 $0<\dfrac{1}{f^2(n)}\leqslant 1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$f^2(n)=\left[f(n-1)+\dfrac{1}{f(n-1)}\right]^2=f^2(n-1)+\dfrac{1}{f^2(n-1)}+2$，故 $2<f^2(n)-f^2(n-1)=\dfrac{1}{f^2(n-1)}+2\leqslant 3$. 于是

$$2<f^2(n)-f^2(n-1)\leqslant 3,$$
$$2<f^2(n-1)-f^2(n-2)\leqslant 3,$$
$$2<f^2(n-2)-f^2(n-3)\leqslant 3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$2<f^2(3)-f^2(2)\leqslant 3,$$
$$2<f^2(2)-f^2(1)\leqslant 3.$$

将以上各式相加得 $2(n-1)<f^2(n)-f^2(1)\leqslant 3(n-1)$.

而 $f(1)=1$，所以 $2n-1<f^2(n)\leqslant 3n-2$，从而 $4015<f^2(2008)\leqslant 6022$.

又 $63^2=3969<4015$，$78^2=6084>6022$，所以 $63^2<f^2(2008)<78^2$，因此 $63<f(2008)<78$.

例 13 (2008 年上海交通大学冬令营试题) 现代信息以二进制字符表示信息，如：

$v=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i=0$ 或 1，($i\in[1,n]$ 且 $i\in\mathbf{N}^*$) 称为长度为 n 的字节. 设 $u=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$v=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，用 $d(u,v)$ 表示使 $a_i\neq b_i$ 的个数，如 $v=(0,0,0,1)$，$u=(1,0,0,1)$，$w=(1,1,1,1)$，则 $d(u,v)=1$，$d(u,w)=2$，$d(v,w)=3$.

(1) 若 $u=(1,0,0,0,0)$，求使 $d(u,v)=1$ 的字节长为 5 的字节 v 有几个？

(2) 若 $u=(1,0,0,0,0)$，求使 $d(u,v)=3$ 的字节长为 5 的字节 v 有几个？

(3) 若 $w=(0,0,0,\cdots,0)$ 长度为 n，$u=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$v=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，求证 $d(u,v)\leqslant d(u,w)+d(v,w)$.

解 (1) $C_5^1=5$(个)；(2) $C_5^3=10$(个)；(3) 设 $u=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中的 n 个分量有 i 个 1(显然，另外的 $(n-i)$ 分量为 0)，设 $v=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 中的 n 个分量有 j 个 1(显然，另外的 $(n-j)$ 分量为 0)，其中 $1\leqslant i,j\leqslant n$. 由于 $d(u,w)+d(v,w)=i+j$ 与 u、v 中 0、1 分量具体排列方式无关，为使 $d(u,v)$ 尽可能大，不妨假设 u 的前 i 个分量为 1，v 的后 j 个分量为 1，下面我们只要证明 $[d(u,v)]_{\max}\leqslant i+j$ 即可. 注意到 u、v 的对称性(不妨假设 $i\leqslant j$)，分别讨论如下.



① 若 $i \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}$，则$[d(u,v)]_{max} = i + j$，而一般情况下的 $d(u,v) \leqslant [d(u,v)]_{max}$，于是 $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(v,w)$；

② $i \leqslant \frac{n}{2} \leqslant j$，若 $n - i \geqslant j$，有$[d(u,v)]_{max} = i + j$（余同上），若 $n - i < j$，则 $n - j < i$，从而$(n - i) + (n - j) < i + j$，于是$[d(u,v)]_{max} = (n - i) + (n - j) < i + j$（余同上）；

③ 若 $\frac{n}{2} \leqslant i \leqslant j$，此时 $i + j \geqslant n$，而$[d(u,v)]_{max} \leqslant n$，所以$[d(u,v)]_{max} \leqslant n \leqslant i + j$（余同上）。

综上所述，总有 $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(v,w)$。

评析 这道题考查创新背景下基础知识、基本技能的灵活应用，如排列组合的基本概念、分类讨论的思想方法等等。

例 14 若定义在集合 D 上的正值函数 $f(x)$ 对任意 $x, y \in D$，都满足函数不等式

$$f(x)f(y) \leqslant \left[f\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 \qquad ①$$

（当且仅当 $x = y$ 时取等号），那么对任意 $x_i \in D$，$i = 1, 2, \cdots, n$，有

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \leqslant \left[f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)\right]^n \qquad ②$$

（当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号）。

证明 当 $n = 1, 2$ 时，结论显然成立，假设当 $n \leqslant k\ (k \geqslant 2)$ 时结论成立，即有

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k) \leqslant \left[f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{k}\right)\right]^k,$$

则当 $n = k + 1$ 时，

(1) 若 $k + 1 = 2m\ (m \in \mathbf{N})$，则

$$\begin{aligned}
& f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_k)f(x_{k+1}) \\
= & [f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_m)][f(x_{m+1})f(x_{m+2})\cdots f(x_{2m})] \\
\leqslant & \left[f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m}\right)\right]^m \left[f\left(\frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{2m}}{m}\right)\right]^m \\
\leqslant & \left\{\left[f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_m}{m} + \frac{x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{2m}}{m}}{2}\right)\right]^2\right\}^m \\
= & \left[f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2m}}{2m}\right)\right]^{2m} \\
= & \left[f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}}{k+1}\right)\right]^{k+1}
\end{aligned}$$



(2) 若 $k+1=2m+1\ (m\in\mathbf{N})$，则 $m+1=\dfrac{k+2}{2}<k$，

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{k+1})\cdot f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)$$

$$=\left[f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{m+1})\right]\cdot\left[f(x_{m+2})\cdot f(x_{m+3})\cdots f(x_{2m+1})f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)\right]$$

$$\leqslant\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{m+1}}{m+1}\right)\right]^{m+1}\cdot\left[f\left(\frac{x_{m+2}+\cdots+x_{2m+1}+\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{2m+1}}{2m+1}}{m+1}\right)\right]^{m+1}$$

$$\leqslant\left\{\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2m+1}+\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{2m+1}}{2m+1}}{2(m+1)}\right)\right]^2\right\}^{m+1}$$

$$=\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2m+1}}{2m+1}\right)\right]^{2m+2}$$

$$=\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)\right]^{k+2}$$

由题设 $f\left(\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)>0$，故有

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_{k+1})\leqslant\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)\right]^{k+1}$$

由(1)、(2)可知，当 $n=k+1$ 时命题成立，从而由数学归纳法知，结论得证。

类似地，可以证明下面的结论：

如果定义在集合 G 上的正函数 $f(x)$ 对任意 $x,y\in G$ 满足函数不等式 $f(x)f(y)\geqslant\left[f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right]^2$（等号当且仅当 $x=y$ 时成立），则对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in G$，有

$$f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\geqslant\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\right]^n,$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时成立。

例 15 设 $g(x)$ 在区间 $D(\subseteq\mathbf{R}^+)$ 上有定义，如果对于任意的 $x_1,x_2\in D$ 和 $t\in(0,1)$，都有

$$g(x_1^t x_2^{1-t})\leqslant tg(x_1)+(1-t)g(x_2),\qquad①$$

$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$，$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n$，且 $a\leqslant a_1b_1\leqslant a_nb_n\leqslant b$，则

$$\sum_{i=1}^n g(a_ib_i)\geqslant\sum_{i=1}^n g(a_ib_{k_i})\geqslant\sum_{i=1}^n g(a_ib_{n+1-i}).\qquad②$$

（其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是 $1,2,3,\cdots,n$ 的任一排列）。



② 式用语言简述就是：顺序最大，杂序居中，逆序最小

先证明一个引理：

引理 设 $0 < a < b$，x，$y \in (a, b)$ 且 $xy = ab$，则

$$g(a) + g(b) \geqslant g(x) + g(y).$$

证 因为 $a < x < b$，$a < y < b$，所以存在唯一的 α，$\beta \in (0, 1)$，使

$$x = a^{\alpha}b^{1-\alpha},\ y = a^{\beta}b^{1-\beta}.$$

又 $xy = ab$，

所以 $a^{\alpha+\beta}b^{2-\alpha-\beta} = ab$，易证 $\alpha + \beta = 1$

应用 ① 式，有

$$g(x) = g(a^{\alpha}b^{1-\alpha}) \leqslant \alpha g(a) + (1-\alpha)g(b),$$

$$g(y) = g(a^{\beta}b^{1-\beta}) \leqslant \beta g(a) + (1-\beta)g(b).$$

所以 $g(x) + g(y) \leqslant (\alpha + \beta)g(a) + (2 - \alpha - \beta)\cdot g(b) = g(a) + g(b)$

证明 对 $k_2 > k_1$，由条件知 $b_{k_2} \geqslant b_{k_1}$，又 $a_2 \geqslant a_1$，取 $a = a_1b_{k_1}$，$b = a_2b_{k_2}$，$x = a_1b_{k_2}$，$y = a_2b_{k_1}$，则 x，$y \in [a, b]$.

当 x，$y \in (a, b)$ 时，由引理得

$$g(a_1b_{k_1}) + g(a_2b_{k_2}) \geqslant g(a_1b_{k_2}) + g(a_2b_{k_1}). \qquad ③$$

当 x，y 与 a，b 相等时，③ 式显然也成立

对 $k_1 > k_2$，把 k_1，k_2，…，k_n 换成 k_2，k_1，k_3，…，k_n 时，

$$\sum_{i=1}^{n} g(a_ib_{k_i}) - [g(a_1b_{k_2}) + g(a_2b_{k_1}) + \sum_{i=3}^{n} g(a_ib_{k_i})]$$
$$= g(a_1b_{k_1}) + g(a_2b_{k_2}) - g(a_1b_{k_2}) - g(a_2b_{k_1}) \geqslant 0.$$

这表明 $G = \sum_{i=1}^{n} g(a_ib_{k_i})$ 的值不增加，同理可证，若 $k_j > k_i$ $(j > i)$，k_1，k_2，…，k_n 中把 k_i，k_j 的位置对换后，G 的值不增加，经有限次这样的对换后 k_1，k_2，…，k_n 必可变成 n，$(n-1)$，…，2，1 的形式，这就证明了 $G \geqslant \sum_{i=1}^{n} g(a_ib_{n+1-i})$.

类似可证 $\sum_{i=1}^{n} g(a_ib_i) \geqslant G$.

特别地，取 $g(x) = x$，由证明可得常见的排序不等式：

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_ib_{k_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_ib_{n+1-i}.$$

在 ② 式中，令 $g(x) = \ln\varphi(x)$，可得一个等价命题

设 $\varphi(x)$ 是 $[a, b]$ ($\subseteq \mathbf{R}^+$) 上的正值连续函数，且对 $x_i \in [a, b]$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$ 有



$\varphi(\sqrt{x_1 x_2}) \leqslant \sqrt{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}$

则对满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，且 $a \leqslant a_1 b_1 \leqslant a_n b_n \leqslant b$ 的 a_i，$b_i(1 \leqslant i \leqslant n)$，有

$$\prod_{i=1}^{n}\varphi(a_i b_i) \geqslant \prod_{i=1}^{n}\varphi(a_i b_{k_i}) \geqslant \prod_{i=1}^{n}\varphi(a_i b_{n-i+1}),$$

其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是 $1, 2, 3, \cdots, n$ 的任一排列。

特别地，取 $\varphi(x) = x + 1\ (x \in \mathbf{R}^+)$，对 $x_1 > 0$，$x_2 > 0$，显然有

$$\varphi(\sqrt{x_1 x_2}) \leqslant \sqrt{\varphi(x_1)\varphi(x_2)},$$

故对 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$，$0 < b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$，有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i b_i + 1) \geqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i b_{k_i} + 1) \geqslant \prod_{i=1}^{n}(a_i b_{n-i+1} + 1).$$

例 16 （第 8 届中国中学生数学冬令营试题，1993 年）设函数 $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ 满足以下条件：对于任意正实数 x、y，有 $f(xy) \leqslant f(x)f(y)$。

试证：对任意的正实数 x 及正整数 n，均有

$$f(x^n) \leqslant f(x) f^{\frac{1}{2}}(x^2) f^{\frac{1}{3}}(x^3) \cdots f^{\frac{1}{n}}(x^n).$$

证明 令 $F_n(x) = \prod_{i=1}^{n} f^{\frac{1}{i}}(x^i)$，$n = 1, 2, \cdots$，于是

$$F_1(x) = f(x),\ F_i(x) = f^{\frac{1}{i}}(x^i) F_{i-1}(x),\ i = 2, 3, \cdots,$$

所以对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，有

$$[F_n(x)]^n = f(x^n)[F_{n-1}(x)]^n,\ [F_{n-1}(x)]^{n-1} = f(x^{n-1})[F_{n-2}(x)]^{n-1},\ \cdots,$$

$$[F_2(x)]^2 = f(x^2)[F_1(x)]^2,\ [F_1(x)]^1 = f(x),$$

连乘上述各式，得

$$[F_n(x)]^n = f(x^n)f(x^{n-1})\cdots f(x^2)f(x)F_{n-1}(x)F_{n-2}(x)\cdots F_2(x)F_1(x).$$

下面用归纳法证明所求不等式。

当 $n = 1$ 时，$F_1(x) = f(x) = f(x^1)$，不等式成立；

假设 $n = k$ 时，$F_k(x) \geqslant f(x^k)$，对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 成立，于是

$$[F_n(x)]^n \geqslant f(x^n)f(x^{n-1})\cdots f(x^2)f(x)f(x^{n-1})\cdots f(x^2)f(x)$$

$$= f(x^n)[f(x^{n-1})f(x)]\cdots[f(x^2)f(x^{n-2})][f(x)f(x^{n-1})],$$

由条件知，$f(x^{n-i})f(x^i) \geqslant f(x^{n-i} \cdot x^i) = f(x^n)$，

于是 $[F_n(x)]^n \geqslant [f(x^n)]^n$，即有 $F_n(x) \geqslant f(x^n)$。

说明 作函数变换，可得如下一系列等价不等式：



(1) 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$，$\forall x, y\in\mathbf{R}^+$，有 $f(xy)\leqslant f(x)+f(y)$，则对 $\forall x\in\mathbf{R}^+$ 及 $n\in\mathbf{N}^+$，有

$$f(x^n)\leqslant f(x)+\frac{1}{2}f(x^2)+\frac{1}{3}f(x^3)+\cdots+\frac{1}{n}f(x^n). \qquad ②$$

证 令 $\lg f(x)\to f(x)$，由 ① 式立即可证.

(2) 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对任意实数 x, y，有

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$$

则对 $\forall x\in\mathbf{R}$，及 $n\in\mathbf{N}^+$，有

$$f(nx)\leqslant f(x)+\frac{1}{2}f(2x)+\frac{1}{3}f(3x)+\cdots+\frac{1}{n}f(nx). \qquad ③$$

证 作变换 $e^x\to x$，$f(\ln x)\to f(x)$，则

$$f(xy)\leqslant f(x)+f(y) \text{ 变为 } f(x+y)\leqslant f(x)+f(y).$$

② 式变成式 ③.

(3) 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，对任意实数 x, y，有

$$f(x+y)\leqslant f(x)f(y)$$

则对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 及 $n\in\mathbf{N}^+$，有

$$f(nx)\leqslant f(x)f^{\frac{1}{2}}(2x)f^{\frac{1}{3}}(3x)\cdots f^{\frac{1}{n}}(nx).$$

证 作前面(2)中作变换 $\ln f(x)\to f(x)$，即可证得.

能力训练5

1. 已知 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $f(1)=0$，$f(x)+f(y)=f(xy)$，求证 $0<x<y<1$ 时，有 $|f(x)|>|f(y)|$.

2. 设 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且 $f(x)\leqslant f^{-1}(x)$，则 $f(x)\leqslant x$.

3. 证明 若对于任意 x, y，有 $f(y)-f(x)\leqslant(y-x)^2$，则对任意正整数 n，任意 a, b，有

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{1}{n}(b-a)^2.$$

4. 设 $y=\frac{f(x)}{x}$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上单调递减，证明 对任意的 x_1、$x_2\in\mathbf{R}^+$，$f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$.

5. (1979年天津市高中数学竞赛第2试试题) 设定义域为一切实数的函数 $f(x)$ 满足下列条件：



(1) 对任意实数 x，均有 $f(x)\geqslant 2$；

(2) 对任意实数 x_1，x_2，均有

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

试证：对任意实数 x_1，x_2，均有

$$\lg f(x_1+x_2)\leqslant \lg f(x_1)+\lg f(x_2).$$

6. 已知 $\{g(n)\}$ 中，$g(1)=3$，$n\in\mathbf{N}^*$，且满足不等式 $\begin{cases}4g(n+1)-3g(n)<2, & ①\\ 2g(n+1)-g(n)>2 & ②\end{cases}$

求证：$2+\left(\frac{1}{2}\right)^n<g(n+1)<2+\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

7. (2006 年天津市高考理科试题) 已知 $\{f(n)\}$，$\{g(n)\}$ 满足 $f(1)=f(2)=1$，$g(1)=g(2)=2$，并且 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\lambda\frac{f(n)}{f(n-1)}$，$\frac{g(n+1)}{g(n)}\geqslant\lambda\frac{g(n)}{g(n-1)}$ (λ 为非零参数，$n=2,3,4,\cdots$).

(1) 当 $\lambda>0$ 时，证明：$\frac{g(n+1)}{f(n+1)}\geqslant\frac{g(n)}{f(n)}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)；

(2) 当 $\lambda>1$ 时，证明：$\frac{g(1)-f(1)}{g(2)-f(2)}+\frac{g(2)-f(2)}{g(3)-f(3)}+\cdots+\frac{g(n)-f(n)}{g(n+1)-f(n+1)}<\frac{\lambda}{\lambda-1}$ ($n\in\mathbf{N}^*$).

8. 设 $f(m,n)$ 满足

$$f(m,n)\leqslant f(m,n-1)+f(m-1,n),$$

其中 m，n 是正整数，m，$n\geqslant 2$ 且

$$f(1,n)=f(m,1)=1.$$

求证：$f(m,n)\leqslant C_{m+n-2}^{m-1}$.

9. (2000 年北京市竞赛题改编) 设函数 $f(x)$，$x\in\mathbf{N}^*$，满足 $f(x+1)=\sin\left[\frac{\pi}{2}\cdot f(x)\right]$，$f(1)=\frac{1}{2}$，求证：$1-f(x)<\frac{\pi}{4}[1-f(x-1)]$ ($x\geqslant 2$).

10. (2007 年中国数学奥林匹克试题) 设有界数列 $\{f(n)\}$ 满足

$$f(n)<\sum_{k=n}^{2n+2006}\frac{f(k)}{k+1}+\frac{1}{2n+2007},\ n=1,2,3,\cdots,$$

证明：$f(n)<\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$

11. 记闭区间 $[0,1]$ 为 I，设函数 $f: I\to I$ 是单调连续函数且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明 f 的图象能被 n 个面积为 $\frac{1}{n^2}$ 的矩形所覆盖.

12. 设 f，g 是 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的实函数，而且对所有的 x 和 y 满足函数方程 $f(x+$



$y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$. 试证明若 $f(x)\not\equiv 0$, 且 $|f(x)|\leqslant 1$ 对所有的 x 均成立, 则有 $|g(y)|\leqslant 1$ 对所有的 y 成立.

13. 设 $y=f(x)$ 是定义在 D 上的函数, 对任意 $x\in D$, 都有 $|f(x)|\leqslant M$ (其中 $M\in \mathbf{R}^+$), 则称 $f(x)$ 为定义域 D 上的有界函数. 求证

$$(n-1)M^n+\prod_{i=1}^{n} f(x_i)\geqslant M^{n-1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

其中 $x_i\in D$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 等号当且仅当 $f(x_i)=M$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时成立.

14. (2008 年河北省高中数学竞赛试题) 设定义在 $[0,2]$ 上的函数 $f(x)$ 满足下列条件:

① 对于 $x\in[0,2]$, 总有 $f(2-x)=f(x)$, 且 $f(x)\geqslant 1$, $f(1)=3$;

② 对于 $x,y\in[1,2]$, 若 $x+y\geqslant 3$, 则 $f(x)+f(y)\leqslant f(x+y-2)+1$.

证明: (1) $f\left(\frac{1}{3^n}\right)\leqslant \frac{2}{3^n}+1$ $(n\in \mathbf{N}^*)$; (2) $x\in[1,2]$ 时, $1\leqslant f(x)\leqslant 13-6x$.

15. (第 12 届韩国数学奥林匹克试题) 设函数 $f(x)$ 对所有的有理数 m、n 都有 $|f(m+n)-f(m)|\leqslant \frac{m}{n}$, 证明: 对所有正整数 k, 有 $\sum_{i=1}^{k}|f(2^k)-f(2^i)|\leqslant \frac{k(k-1)}{2}$.

16. 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)<\frac{f(x)+f(y)}{2}$, $x,y\in(a,b)$, $x\neq y$.

证明: $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$,

其中 x_i 属于 (a,b), 至少有一对 (i,j), $x_i\neq x_j$.

17. 设 f 是线段 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上的函数. 已知 f 非负且 $f(1)=1$, 此外, 对满足 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $x_1+x_2\leqslant 1$ 的任意两个实数 x_1、x_2, 有 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

(1) 证明: 对上述 f 及一切 x 都有 $f(x)\leqslant 2x$;

(2) 不等式 $f(x)\leqslant 1.9x$ 对一切 x 都成立吗?

18. 设 $f:Q\to Q$ 对所有 α、$\beta\in Q$ 满足下列条件:

(1) $f(0)=0$;

(2) 若 $\alpha\neq 0$, 则 $f(\alpha)>0$;

(3) $f(\alpha\beta)=f(\alpha)f(\beta)$;

(4) $f(\alpha+\beta)\leqslant f(\alpha)+f(\beta)$;

(5) 对所有 $m\in\mathbf{Z}$, $f(m)\leqslant 1989$.

试证明: 若 $f(\alpha)\neq f(\beta)$, 则 $f(\alpha+\beta)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$.

19. (2004 年江苏省高考理科压卷题改编) 已知函数 $f(x)$ $(x\in\mathbf{R})$ 满足下列条件: 对任意的实数 x_1, x_2 都有 $\lambda(x_1-x_2)^2\leqslant(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]$ 和 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|$, 其中 λ 是大于 0 的实数.

设实数 a_0, a, b 满足 $f(a_0)=0$ 和 $b=a-\lambda f(a)$.



证明：$[f(b)]^2 \leqslant (1-\lambda^2)[f(a)]^2$.

20. (2007年北方数学奥林匹克邀请赛试题) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足

(1) $f(0)=0$；

(2) 对任意 $x、y \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$，都有 $f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$；

(3) 当 $x \in (-1, 0)$ 时，都有 $f(x)>0$.

求证 $f\left(\frac{1}{19}\right)+f\left(\frac{1}{29}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+7n+11}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$，

其中 $n \in \mathbf{N}^+$.

21. (1999年第11届俄罗斯数学奥林匹克) 考虑函数 $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$. 证明存在两个有理数 a 和 b 使得 $\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \frac{f(a+b)}{2}$.

22. 设 $\mathbf{N}^+$ 为全体正整数集合，$k \in \mathbf{N}^+$，如果有一个函数 $f: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{N}^+$ 是严格递增的，且对每个 $n \in \mathbf{N}^+$，都有 $f(f(n))=kn$，求证：对每一个 $n \in \mathbf{N}^+$，都有 $\frac{2k}{k+1}n \leqslant f(n) \leqslant \frac{k+1}{2}n$.

23. (2005年中国国家队集训选拔赛试题) 设 a 是给定的正实数. 求所有的函数 $f: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}$，使得对任意满足条件 $am \leqslant k < (a+1)m$ 的正整数 k、m，都有 $f(k+m)=f(k)+f(m)$.

24. (1) 研究函数 $f(x, y)=x^2+xy+y^2$. 证明：对任何点 (x, y) 存在整数点 (m, n)，使

$$f(x-m, y-n)=(x-m)^2+(x-m)(y-n)+(y-n)^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

(2) 用 $\bar{f}(x, y)$ 表示 $f(x-m, y-n)$ 在 $m、n$ 取一切整数时的最小值，那么(1)就归结为：对一切 $x、y$，有不等式 $\bar{f}(x, y) \leqslant \frac{1}{2}$.

证明：实际上更强的不等式 $\bar{f}(x, y) \leqslant \frac{1}{3}$，并求使 $\bar{f}(x, y)=\frac{1}{3}$ 成立的所有点 (x, y) 的集合.

(3) 研究函数 $f_a(x, y)=x^2+axy+y^2\ (0 \leqslant a \leqslant 2)$，求与 a 有关的 c，使对一切 (x, y) 有不等式 $\bar{f}_a(x, y) \leqslant c$，并力求找到准确的估计.

25. 若对任何 $x、y \in \mathbf{R}$，有 $f(x)+f(y) \leqslant 2f\left[\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\right]$，则对任何整数 $n \geqslant 2$，及 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}$，有 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqslant nf\left[\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}\right]$.



第[illegible]讲　与函数不等式有关的其他问题

知识扫描

数学中许多著名的概念如单调函数、凸函数都是用函数不等式进行定义的。最近中国科学院院士林群建议在区间上用一个函数不等式定义导数，将使微积分学初等化，所以函数不等式的应用将会是异常广泛和美妙的。相信函数不等式会成为历史悠久、内容丰富、应用极其广泛的一个数学新分支。

在本讲中，主要讨论如下一些问题：

1. 用某个或某几个函数不等式来表达某种特定函数，同时再附加若干保证函数不等式的解唯一性的条件（这一组不等式、条件常称为公理），这样就定义了一个函数，这种定义函数的方法称为公理化方法。本讲中通过一些经典的函数不等式的讨论，可以发现函数不等式能含蓄地刻画某些函数的本质属性，可以用公理化方法定义基本初等函数。
2. 含有多个函数的函数不等式问题，包括含有复合函数的不等式。
3. 定义在正整数集上的函数不等式问题。
4. 其他与函数不等式有关的综合问题。

例题分析

例1　设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$f(0)=0$，且对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y), \qquad ①$$

则

$$f(x)=ax. \qquad ②$$

证明　由式①得

$$f(x+y)-f(x)\geqslant f(y). \qquad ③$$

当 $y>0$ 时，由式③得 $\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\geqslant\frac{f(y)}{y}$，令 $y\to+0$，得

$$f'(x)\geqslant f'(0)=a;\tag{4}$$

当 $y<0$ 时，由式③得 $\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\leqslant\frac{f(y)}{y}$，令 $y\to-0$，得

$$f'(x)\leqslant f'(0)=a.\tag{5}$$

联合式④、⑤，得 $f'(x)=a$，所以 $f(x)=ax+b$. 代入式①中，结合 $f(0)=0$，得 $b=0$，即可得式②.

说明 上面我们用单变量的函数不等式①来刻画基本初等函数 $f(x)=ax$. 由例1可得

1. 若连续函数 $f(x)(\geqslant0)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)+2\sqrt{f(x)f(y)}$，则 $f(x)=ax^2$，$a>0$.

证明 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)+2\sqrt{f(x)f(y)}\Leftrightarrow\sqrt{f(x+y)}\geqslant\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}$，$\sqrt{f(0)}=0$，由例1知 $\sqrt{f(x)}=kx$，$f(x)=k^2x^2=ax^2$.

2. 若连续函数 $f(x)(x\in\mathbf{R}^+)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f^2(x+y)\geqslant f^2(x)+f^2(y)$，$\forall x,y\in\mathbf{R}^+$，则 $f(x)=a\sqrt{x}$，$a>0$.

证明 由例1可得 $f^2(x)=kx$，故 $f(x)=\sqrt{kx}=a\sqrt{x}$.

3. 若连续函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)+kxy$，则 $f(x)=\frac{k}{2}x^2+bx$.

解 令 $g(x)=f(x)-\frac{k}{2}x^2$，则 $g(x+y)\geqslant g(x)+g(y)$，$g(0)=0$，根据例1可得

$$g(x)=bx,\ f(x)=\frac{k}{2}x^2+g(x)=\frac{k}{2}x^2+bx.$$

4. 设连续函数 $f(x)$ 除了0以外的地方都有定义，满足

$$\frac{1}{f(x+y)}\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{f(x)f(y)},\tag{6}$$

且 $x\neq0$ 处 $f(x)\neq0$，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$，则 $f(x)=\frac{a}{x}$，$a\neq0$.

证明 因为题给函数不等式⑥中分母不能为0，所以对每一个 $x\neq0$，$f(x)\neq0$. 当 $f(x)>0$ 时，由式⑥可得

$$\frac{1}{f(x+y)}\leqslant\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{f(y)}.\tag{7}$$

令 $g(x)=\frac{1}{f(x)}$，则⑦式变为



$$g(x+y) \leqslant g(x)+g(y).$$ ⑧

因为 $f(x)$ 在除了 0 以外的实数上均连续，所以 $g(x)$ 在除了 $x=0$ 以外的实数上连续，且 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$，因此，由例 1 知式 ⑧ 有唯一的连续解 $g(x)=cx$ 故

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{cx}=\frac{a}{x}, \text{其中 } a=\frac{1}{c}=\frac{1}{g(1)}=f(1).$$

5 通常例 1 中 ① 这类函数不等式的解不是唯一的，为了使它的解是唯一，我们需要给予一些附加条件 如要求该函数是"连续的"，或者必须是"在定义域中每一个有限区间内为有界的"，或是"单调函数" 等等

在假设函数 f 是连续时，常见的单变量一元函数不等式，描述基本初等函数我们还可得以下结果

(a) $f(x+y)\geqslant f(x)f(y)$，在 $f(0)=1$ 条件下在 $\mathbf{R}$ 上的解为 $f(x)=a^x$，$a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$；

(b) $f(xy)\geqslant f(x)+f(y)$，在 $f(1)=0$ 条件下的在 $\mathbf{R}^+$ 上解为 $f(x)=\log_a x$，$a\in(0,1)\cup(1,+\infty)$；

(c) $f(xy)\geqslant f(x)f(y)$，在 $f(1)=1$ 条件下的在 $\mathbf{R}^+$ 上解为 $f(x)=x^a$。

例 2 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$g(0)=0$，$a=g'(0)$，且对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，都有不等式

$$f(x+y)\geqslant f(x)+g(y)$$ ①

成立，则

$$f(x)=ax+b, g(y)\leqslant ay,$$ ②

式 ① 中等号成立，当且仅当 ② 中 $g(y)=ay$ 等号成立

证明 由式 ① 得

$$f(x+y)-f(x)\geqslant g(y).$$ ③

当 $y>0$ 时，由式 ③ 得 $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}\geqslant\dfrac{g(y)}{y}$，令 $y\to+0$，得

$$f'(x)\geqslant g'(0)=a;$$ ④

当 $y<0$ 时，由式 ③ 得 $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}\leqslant\dfrac{g(y)}{y}$，令 $y\to-0$，得

$$f'(x)\leqslant g'(0)=a$$ ⑤

联合式 ④、⑤，得 $f'(x)=a$，所以 $f(x)=ax+b$，代入式 ① 中即可得式 ②

说明 由例 2，可推出一系列结论

1 设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$f(0)=0$，$a=f'(0)$，且对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，都有不等式 ② 成立，则 $f(x)=ax$

在例 2 中令 $f(x)=g(x)$，并注意到 $f(0)=0$，即可得(过程略，此即例 1)



2 设正值函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，$g(0)=1$，$a=g'(0)$，且对 $\forall x,y\in\mathbf{R}$，都有

$$f(x+y)\leqslant f(x)g(y). \quad ⑥$$

则 $$f(x)=ca^x,g(y)\geqslant a^y,\text{这里 } a,c>0,a\neq 1. \quad ⑦$$

式 ⑥ 中等号成立，当且仅当式 ⑦ 中 $g(y)\geqslant y^a$ 等号成立

证明 在例 2 中，用 $\ln f(x)\to f(x)$，$\ln g(x)\to g(x)$，即可得证

3 设正值函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上连续，$g(1)=1$，$a=g'(0)$，且对 $\forall x,y\in\mathbf{R}^+$，都有

$$f(xy)\leqslant f(x)g(y) \quad ⑧$$

则 $$f(x)=cx^a,g(y)\geqslant y^a,\text{这里 } c>0 \quad ⑨$$

式 ⑧ 中等号成立，当且仅当 ⑨ 中 $g(y)\geqslant y^a$ 等号成立

证明 在 ⑥⑦ 中，用 $\ln x\to x$，$f(x)\to f(\ln x)$，即可得证

4 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上连续，$g(1)=0$，$a=g'(1)$，且对 $\forall x,y\in\mathbf{R}^+$，都有

$$f(xy)\leqslant f(x)+g(y). \quad ⑩$$

则 $$f(x)=a\ln x+b,g(y)\geqslant a\ln y.$$

式 ⑩ 中等号成立，当且仅当 $g(y)=a\ln y$.

证明 在 ①② 中，用 $\ln x\to x$，$f(x)\to f(\ln x)$，即可得证.

注 函数不等式 ① 的不连续解是存在的，并且个数有无限多个，如：函数

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

不难看出它是函数不等式 ① 的一个不连续的解.

例 3 设连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，且 $f'(0)$ 存在，试解函数不等式：$f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)\geqslant f(x)+f(y)$.

解 已知函数不等式可化为 $f\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)-f(x)\geqslant f(y)$，即

$$\frac{f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)-f(x)}{\frac{x+y}{1+xy}-x}\left(\frac{x+y}{1+xy}-x\right)\geqslant f(y),$$

当 $y>0$ 时，上式化为 $\dfrac{f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)-f(x)}{\frac{x+y}{1+xy}-x}\left(\dfrac{1-x^2}{1+xy}\right)\geqslant\dfrac{f(y)}{y}$，

令 $y\to 0$，得 $f'(x)(1-x^2)\geqslant f'(0)$.

当 $y<0$ 时，上式化为 $\dfrac{f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)-f(x)}{\frac{x+y}{1+xy}-x}\left(\dfrac{1-x^2}{1+xy}\right)\leqslant\dfrac{f(y)}{y}$，



令 $y\to 0$,得 $f'(x)(1-x^2)\leqslant f'(0)$.

因此,$f'(x)(1-x^2)=f'(0)$,$f(x)=\int\frac{f'(0)}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{f'(0)}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c_1$.

其中 c_1 为任意常数.回代原函数不等式,比较得到 $c_1\leqslant 0$.由 $f(0)=0$,得 $c_1=0$,再令 $f'(0)\neq 0$,就得到函数不等式的严格单调的可微解

$$f(x)=\begin{cases}a, & x=1\\ \frac{f'(0)}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|, & x\neq 1\end{cases}$$

其中 $a\leqslant 0$.

注 (1) 如果是求一个特解,也可以用求偏导数的方法求解.

解 设 $u=\frac{x+y}{1+xy}$,两边关于 x,y 求偏导数,得

$$\frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{1-y^2}{(1+xy)^2}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\quad \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}=\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y},$$

两式相除,得 $\frac{1-y^2}{1-x^2}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big/\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}$,即 $(1-y^2)\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}=(1-x^2)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$,由 x,y 的任意性,知 $(1-x^2)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=c$,因此可得原函数不等式可微的形式解

$$f(x)=\int\frac{c}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{c}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+c_1,$$

其中 c 为任意常数.回代原函数不等式,比较得到 $c_1=0$.再令 $a=\frac{c}{2}\neq 0$,就得到函数不等式的严格单调的可微解

$$f(x)=\begin{cases}a, & x=1\\ a\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|, & x\neq 1\end{cases}$$

其中 $a\leqslant 0$.

(2) 利用常数变易法,可设其他解为 $f(x)=a\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+p(x)$,代入原函数不等式,整理得

$$p\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)\leqslant p(x)+p(y)$$

当 x,$y\in\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ 时,$\frac{x+y}{1+xy}\leqslant\frac{x+y}{1}=x+y$.所以 $p(x)=x$ 是函数不等式在 $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ 上的一个解.因此 $f(x)=a\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+x$ 也是函数不等式在 $\mathbf{R}^+\cup\{0\}$ 上的一个解.

一般地,设连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,$f(0)=0$.当 $y\to 0$ 时,$W(x,y)\to\varphi(x)$,且 $\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}$,



$p(x)$，则函数不等式 $f[W(x,y)]\geqslant f(\varphi(x))+h(x)f(y)$ 可微解可求.

解 $f[W(x,y)]\geqslant f(\varphi(x))+h(x)f(y)$ 可化为

$$f[W(x,y)]-f(\varphi(x))\geqslant h(x)f(y).$$

当 $y>0$ 时，上式化为 $\dfrac{f[W(x,y)]-f(\varphi(x))}{W(x,y)-\varphi(x)}\cdot\dfrac{W(x,y)-\varphi(x)}{y}\geqslant h(x)\dfrac{f(y)}{y}$，

当 $y\to0$，得 $f'(\varphi(x))\cdot p(x)\geqslant h(x)f'(0)$，

当 $y<0$ 时，上式化为 $\dfrac{f[W(x,y)]-f(\varphi(x))}{W(x,y)-\varphi(x)}\cdot\dfrac{W(x,y)-\varphi(x)}{y}\leqslant h(x)\dfrac{f(y)}{y}$，

令 $y\to0$，得 $f'(\varphi(x))\cdot p(x)\leqslant h(x)f'(0)$，

所以 $f'(\varphi(x))\cdot p(x)=h(x)f'(0)$，$f(\varphi(x))=f'(0)\displaystyle\int\frac{h(x)}{p(x)}dx$

进而作替换 $\varphi^{-1}(x)\to x$，即可得到所给不等式的可微解

注意 结果一定要回代原函数不等式及条件中检验，以确定常数的取值范围及所求函数无定义点的取值限制.

例4 （2005年土耳其数学奥林匹克试题）求所有函数 $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，使得对所有的 $x\in[0,+\infty)$，有 $4f(x)\geqslant3x$，且 $f[4f(x)-3x]=x$.

解 经检验，$f(x)=x$ 是满足题设要求的函数

下面用反证法证明 $f(x)=x$ 是唯一的解.

假设 $f(x)$ 满足题意且存在 $a\in[0,+\infty)$ 使 $f(a)\neq a$

设 $a_0=f(a)$，$a_1=a$，$a_{n+2}=4a_n-3a_{n+1}$，$n=0,1,\cdots$.

由题设可知，$f(a_{n+1})=a_n$，且 $a_n\geqslant0$.

注意到数列 $\{a_n\}$ 的特征方程是 $t^2+3t-4=0$，两根为 1 和 -4.

故可设 $a_n=c_1\cdot1^n+c_2\cdot(-4)^n$.

将 $a_0=f(a)$，$a_1=a$ 代入可解得

$$c_1=\frac{4f(a)+a}{5},\ c_2=\frac{f(a)-a}{5}\neq0$$

若 $c_2>0$，$a_{2k+1}=c_1-c_2\cdot4^{2k+1}$，则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}}{4^{2k+1}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{c_1}{4^{2k+1}}-c_2\right)=-c_2<0$$

所以必存在一个 k 使得 $\dfrac{a_{2k+1}}{4^{2k+1}}<0$，与 $a_n\geqslant0$ 矛盾

若 $c_2<0$，同理，由 $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{4^{2k}}=c_2<0$ 推出矛盾

综上所述，满足题设要求的所有函数为 $f(x)=x$

例5 设 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，对任意 m、$n\in\mathbf{N}^*$，有 $f(m+n)\geqslant f(m)+f(n)$，且 $f(2)=0$，



$f(3)>0$，$f(9999)=3333$，求 $f(1997)$

解 由已知条件

$$f(m+n)\geqslant f(m)+f(n).\qquad ①$$

令 $m=n=1$，由①式得 $f(2)\geqslant 2f(1)$，由 $f(2)=0$ 及 $f(1)\geqslant 0$ 可得 $f(1)=0$ 设 $m+n=3$，$m=2$，容易求得 $f(3)=1$。设 $\forall k\in\mathbf{N}^*$，则 $f(3k)=f[3(k-1)+3]\geqslant f[3(k-1)]+f(3)=f[3(k-1)]+1$，$f[3(k-1)]=f[3(k-2)+3]\geqslant f[3(k-2)]+f(3)=f[3(k-2)]+1$，故

$$f(3k)\geqslant f[3(k-1)+1]\geqslant f[3(k-2)]+2\geqslant\cdots\geqslant k.\qquad ②$$

由已知 $f(3\times 3333)=3333$，有理由猜想，如果 $k<3333$，则有 $f(3k)=k$，现用反证法证明

设某 $k_0<3333$，但 $f(3k_0)\neq k_0$，则由②式可得 $f(3k_0)>k_0$，设 $f(3k_0)\geqslant k_0+1$，则 $f(9999)\geqslant f[(9999-3k_0)+3k_0]\geqslant(3333-k_0)+(k_0+1)>3333$，这个结果与题设矛盾，故只有 $f(3k)=k$，由此可得 $f(3\times 1997)=1997$，又 $f(3\times 1997)\geqslant f(2\times 1997)+f(1997)\geqslant 3f(1997)$，故 $f(1997)\leqslant\frac{1997}{3}<666$，又 $f(1997)=f(1995+2)\geqslant f(1995)+f(2)=f(3\times 665)+0=665$，和上式相比较，求得 $f(1997)=665$

例 6 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，对任意 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$，有 $|f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|$，且 $f(2)=2$，数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$f(a_n)=2a_{n+1}-a_n$，求证：$a_n<a_{n+1}<2$

证明 设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(2)=0$

且 $f(x_1)=g(x_1)+x_1$，$f(x_2)=g(x_2)+x_2$

所以 $|g(x_2)+x_2-g(x_1)-x_1|<|x_2-x_1|$，不妨设 $x_2>x_1$，则

$$-(x_2-x_1)<g(x_2)+x_2-g(x_1)-x_1<x_2-x_1,$$

所以 $-2(x_2-x_1)<g(x_2)-g(x_1)<0$，

故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，

且 $|g(x_2)-g(x_1)|<2|x_2-x_1|$，

所以 $|g(a_{n+1})-g(a_n)|<2|a_{n+1}-a_n|$，

而 $g(a_{n+1})=f(a_{n+1})-a_{n+1}=2(a_{n+2}-a_{n+1})$，

$g(a_n)=f(a_n)-a_n=2(a_{n+1}-a_n)$，

所以 $|g(a_{n+1})-g(a_n)|=|2(a_{n+2}-a_{n+1})-2(a_{n+1}-a_n)|<2|a_{n+1}-a_n|$，

即 $|(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)|<|a_{n+1}-a_n|$，

由此得 $a_{n+2}-a_{n+1}$ 与 $a_{n+1}-a_n$ 同号，

而 $g(1)=f(1)-1>0$，所以 $f(1)>1$，

又 $f(a_1)=2a_2-a_1$，即 $a_2=\frac{1}{2}[f(a_1)+a_1]=\frac{1}{2}[f(1)+1]>1=a_1$，

即 $a_2-a_1>0$，所以 $a_{n+1}-a_n>0$，

故 $a_n<a_{n+1}$



又 $g(a_n)=f(a_n)-a_n=2(a_{n+1}-a_n)>0=g(2)$,

所以 $a_n<2$,所以 $a_n<a_{n+1}<2$. 证毕.

例 7 若函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$ 在以 a,b 为端点的区间 D 上有定义,且 $b>a$,$n\in\mathbf{N}$, $n\geqslant 2$,则存在 x_1, x_2, $\cdots$, $x_n\in D$,使

$$\left|\prod_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)\right|\geqslant\left(\frac{b-a}{2}\right)^n. \qquad ①$$

证明 假设对任何 x_1, x_2, $\cdots$, $x_n\in D$ 时,有

$$\left|\prod_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i)\right|<\left(\frac{b-a}{2}\right)^n. \qquad ②$$

易知形如式 ② 的不等式共有 2^n 个. 令

$$A=x_1x_2\cdots x_n,\ B=f_1(x_1)+f_2(x_2)+\cdots+f_n(x_n),$$

且令 $Q=A-B$,当 $A=b^{n-k}a^k$ 时规定 $Q'=(-1)^kQ$, $0\leqslant k\leqslant n$. 则

$$\sum_{2^n}Q'=\sum_{2^n}(-1)^kQ=\sum_{2^n}(-1)^k(A-B)$$
$$=\sum_{2^n}(-1)^kA-\sum_{2^n}(-1)^kB.$$

下面证明:

(ⅰ) $\sum_{2^n}(-1)^kA=(b-a)^n$;

(ⅱ) $\sum_{2^n}(-1)^kB=0$.

事实上,当 $A=b^{n-k}a^k$ 时,因 $A=x_1x_2\cdots x_n$,故 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 中取 a 的有 k 个,其余 $n-k$ 个取 b,从而知这样的 A 共有 C_n^k 个. 故

$$\sum_{2^n}(-1)^kA=\sum_{2^n}(-1)^kb^{n-k}a^k=\sum_{2^n}b^{n-k}a^k$$
$$=\sum_{k}C_n^kb^{n-k}(-a)^k=(b-a)^n,$$

故(ⅰ)成立.

又将 2^n 个 $(-1)^kB$ 配成 2^{n-1} 对,固定 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}f_i(x_i)$ 时,$(-1)^kB_1=(-1)^k\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}f_i(x_i)+f_n(b)\right]$ 与 $(-1)^{k+1}B_2=(-1)^{k+1}\left[\sum\limits_{i=1}^{n-1}f_i(x_i)+f_n(a)\right]$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ 配成一对,显然有

$$(-1)^kB_1+(-1)^{k+1}B_2=(-1)^kf_n(b)+(-1)^{k+1}f_n(a),$$

注意到 x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1} 中取 a 的有 k 个,其余 $n-1-k$ 个取 b,从而得



$$\sum_{Q\in B}^{2^n}(-1)^k B=\sum_{k=0}^{n-1}\left[C_{n-1}^k(-1)^k f_n(b)+C_{n-1}^k(-1)^{k+1}f_n(a)\right]$$

$$=\left[f_n(b)-f_n(a)\right]\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^k=0.$$

一方面由(ⅰ)、(ⅱ)式知

$$\left|\sum_{Q\in Q'}Q'\right|=\left|\sum_{Q\in A}(-1)^k A-\sum_{Q\in B}(-1)^k B\right|$$

$$=|(b-a)^n-0|=(b-a)^n.$$

另一方面，又有

$$\left|\sum_{Q\in Q}^{2^n}Q'\right|\leqslant\sum_{Q\in Q}|Q'|=\sum_{Q\in Q}^{2^n}|Q|$$

$$<2^n\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^n=(b-a)^n.$$

故 $(b-a)^n<(b-a)^n$，显然矛盾，从而结论得证。

说明 在①式中取 $n=2$，$I=[0,1]$，$f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=g(x)$，则得如下竞赛试题：(1959年美国普特南大学生数学竞赛题) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是定义在区间$[0,1]$上的实值函数，试证存在 $0\leqslant x_0, y_0\leqslant 1$，使得

$$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|\geqslant\frac{1}{4}.$$

实际上，此题也可直接证明如下：

用反证法，假若不然，则对任何 $0\leqslant x_0, y_0\leqslant 1$，有

$$|x_0y_0-f(x_0)-g(y_0)|<\frac{1}{4}.$$

特别对于 $x_0=0, 1$，$y_0=0, 1$ 有

$$\begin{cases}|0-f(0)-g(0)|<\dfrac{1}{4},\\ |0-f(0)-g(1)|<\dfrac{1}{4},\\ |0-f(1)-g(0)|<\dfrac{1}{4},\\ |1-f(1)-g(1)|<\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

将以上不等式相加得

$$1>|f(0)+g(0)|+|-f(0)-g(1)|+|-f(1)-g(0)|+|f(1)+g(1)-1|\geqslant|-1|=1,$$

矛盾.



在 ① 式中取 $a=r$，$b=r+2\sqrt[n]{k}$，$r\in\mathbb{R}$，并注意到 r 的任意性，即可得到

若实函数 $f_1(x)$、$f_2(x)$、$\cdots$、$f_n(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有定义，$n\geqslant 2$，任取 $k\in\mathbb{R}^+$，则存在实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n，使

$$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\right|\geqslant k.$$

例 8 已知正项数列 $\{f(n)\}$ 满足 $f(1)=a(0<a<1)$，且 $f(n+1)\leqslant\dfrac{f(n)}{1+f(n)}$，求证：

(1) $f(n)\leqslant\dfrac{a}{1+(n-1)a}$；

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k+1}<1$.

证明 (1) $f(n)>0$，$f(n+1)\leqslant\dfrac{f(n)}{1+f(n)}$，

所以两边取倒数得 $\dfrac{1}{f(n+1)}\geqslant\dfrac{1+f(n)}{f(n)}$，即 $\dfrac{1}{f(n+1)}-\dfrac{1}{f(n)}\geqslant 1$.

所以 $\dfrac{1}{f(n)}-\dfrac{1}{f(1)}=\left[\dfrac{1}{f(n)}-\dfrac{1}{f(n-1)}\right]+\left[\dfrac{1}{f(n-1)}-\dfrac{1}{f(n-2)}\right]+\cdots+\left[\dfrac{1}{f(2)}-\dfrac{1}{f(1)}\right]\geqslant n-1$.

所以 $\dfrac{1}{f(n)}-\dfrac{1}{a}\geqslant n-1$，故 $f(n)\leqslant\dfrac{a}{1+(n-1)a}$.

(2) 注意到 $0<a<1$，于是由(1)得

$$f(n)\leqslant\frac{a}{1+(n-1)a}=\frac{1}{\frac{1}{a}+(n-1)}<\frac{1}{n}.$$

从而，有
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k+1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}<1.$$

说明 数列型函数不等式，综合了数列与不等式的内容，内涵丰富，是高考的热点和难点. 对这类问题的处理常采取放缩、利用数列的单调性等技巧，而取一个数(式)的倒数在这类问题中却有着独特的作用，可谓"小技巧，办大事".

例 9 已知数列 $\{f(n)\}$ 的各项都是正数，且满足关系 $f(n+1)\leqslant f^k(n)-f^{k+1}(n)$ ($k\in\mathbb{N}^+$)，求证：对于所有正整数 $n(n\geqslant 2)$，都有

$$f(n)\leqslant\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}+(n-2)k^k}.$$

证明 由 $0<f(n+1)\leqslant f^k(n)[1-f(n)]$，知 $0<f(n)<1$.

又 k 为正整数，所以，



$$f^k(n) \leqslant f(n),\ \frac{1}{1-f(n)} > 1$$

应用 $k+1$ 元均值不等式得

$$f(2) \leqslant f^k(1)[1-f(1)] = \frac{1}{k}f(1)f(1)\cdots f(1)[k-kf(1)]$$

$$\leqslant \frac{1}{k}\left[\frac{kf(1)+(k-kf(1))}{k+1}\right]^{k+1} = \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}},$$

即 $\dfrac{1}{f(2)} \geqslant \dfrac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$

因为 $f(n+1) \leqslant f^k(n)[1-f(n)] \leqslant f(n)[1-f(n)]$，则

$$\frac{1}{f(n+1)} \geqslant \frac{1}{f(n)[1-f(n)]} = \frac{1}{f(n)} + \frac{1}{1-f(n)},$$

故 $\dfrac{1}{f(n)} - \dfrac{1}{f(2)} = \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1}\left[\frac{1}{f(i+1)} - \frac{1}{f(i)}\right] \geqslant \sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{1-f(i)} \geqslant n-2$

当 $n \geqslant 3$ 时，有

$$\frac{1}{f(n)} \geqslant \frac{1}{f(2)} + (n-2) \geqslant \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} + (n-2),$$

所以，$f(n) \leqslant \dfrac{k^k}{(k+1)^{k+1}+(n-2)k^k}$.

而 $n=2$ 的情况已包含在上式中，故得证。

例 10 （2008 年安徽省高考理科试题）设数列 $\{f(n)\}$ 满足 $f(1)=0$，$f(n+1)=cf^3(n)+1-c$，$n \in \mathbf{N}^*$，其中 c 为实数.

(1) 证明：$f(n) \in [0,1]$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立的充分必要条件是 $c \in [0,1]$；

(2) 设 $0 < c < \dfrac{1}{3}$，证明：$f(n) \geqslant 1-(3c)^{n-1}$，$n \in \mathbf{N}^*$；

(3) 设 $0 < c < \dfrac{1}{3}$，证明：$f^2(1)+f^2(2)+\cdots+f^2(n) > n+1-\dfrac{2}{1-3c}$，$n \in \mathbf{N}^*$.

解 (1) 必要性：因为 $f(1)=0$，所以 $f(2)=1-c$. 又因为 $f(2) \in [0,1]$，故 $0 \leqslant 1-c \leqslant 1$，即 $c \in [0,1]$.

充分性 设 $c \in [0,1]$，对 $n \in \mathbf{N}^*$ 用数学归纳法证明 $f(n) \in [0,1]$.

当 $n=1$ 时，$f(1)=0 \in [0,1]$. 假设 $f(k) \in [0,1]$ $(k \geqslant 1)$，

则 $f(k+1)=cf^3(k)+1-c \leqslant c+1-c=1$，且 $f(k+1)=cf^3(k)+1-c \geqslant 1-c \geqslant 0$，

所以 $f(k+1) \in [0,1]$，由数学归纳法知 $f(n) \in [0,1]$ 对所有 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立.

(2) 设 $0 < c < \dfrac{1}{3}$，当 $n=1$ 时，$f(1)=0$，结论成立.

当 $n \geqslant 2$ 时，因为 $f(n)=cf^3(n-1)+1-c$，所以 $1-f(n)=c[1-f(n-1)][1+f(n-1)+f^2(n-1)]$



$\cdots)+f^2(n-1)]$.

因为 $0<c<\frac{1}{3}$，由(1)知 $f(n-1)\in[0,1]$，所以 $1+f(n-1)+f^2(n-1)\leqslant 3$ 且 $1-f(n-1)\geqslant 0$.

所以 $1-f(n)\leqslant 3c[1-f(n-1)]$.

所以 $1-f(n)\leqslant 3c[1-f(n-1)]\leqslant(3c)^2[1-f(n-2)]\leqslant\cdots\leqslant(3c)^{n-1}[1-f(1)]=(3c)^{n-1}$.

所以 $f(n)\geqslant 1-(3c)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(3) 设 $0<c<\frac{1}{3}$，当 $n=1$ 时，$f^2(1)=0>2-\frac{2}{1-3c}$，结论成立.

当 $n\geqslant 2$ 时，由(2)知 $f(n)\geqslant 1-(3c)^{n-1}>0$.

所以 $f^2(n)\geqslant[1-(3c)^{n-1}]^2=1-2(3c)^{n-1}+(3c)^{2(n-1)}>1-2(3c)^{n-1}$.

故
$$\begin{aligned}f^2(1)+f^2(2)+\cdots+f^2(n)&=f^2(2)+\cdots+f^2(n)>n-1-2[3c+(3c)^2+\cdots+(3c)^{n-1}]\\&=n+1-\frac{2[1-(3c)^n]}{1-3c}>n+1-\frac{2}{1-3c}.\end{aligned}$$

例 11 （2007年南昌市高中数学竞赛试题）正整数数列 $\{f(n)\}$ 满足：$f(2)=15$ 及

$$2+\frac{4}{f(n)+1}<\frac{f(n)}{f(n)-4n+2}+\frac{f(n)}{f(n+1)-4n-2}<2+\frac{4}{f(n)-1},$$

计算 $S(n)=\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\cdots+\frac{1}{f(n)}$.

解 先求通项 $f(n)$. 当 $n=1$ 时，条件化为

$$2+\frac{4}{f(1)+1}<\frac{f(1)}{f(1)-2}+\frac{f(1)}{9}<2+\frac{4}{f(1)-1},\qquad ①$$

此条件蕴含 $f(1)\neq 1$ 和 $f(1)\neq 2$，即 $f(1)\geqslant 3$. 由式①可得

$$\frac{2}{f(1)-2}+\frac{f(1)}{9}-\frac{4}{f(1)+1}>1,\qquad ②$$

$$\frac{2}{f(1)-2}+\frac{f(1)}{9}-\frac{4}{f(1)-1}<1.\qquad ③$$

由式②可得 $f^3(1)-10f^2(1)-11f(1)+108>0$.

解得 $$f(1)\leqslant 3 \text{ 或 } f(1)\geqslant 11.\qquad ④$$

由式③可得

$$f^3(1)-12f^2(1)+f(1)+36<0,$$

解得 $$3\leqslant f(1)\leqslant 10.\qquad ⑤$$

据式④，式⑤得 $f(1)=3$.



当 $n=2$ 时，条件可化为

$$2+\frac{1}{4}<\frac{15}{9}+\frac{15}{f(3)-10}<2+\frac{2}{7},$$

即 $\frac{7}{12}<\frac{15}{f(3)-10}<\frac{13}{21}$，

从而 $34+\frac{3}{13}<f(3)<35+\frac{5}{7}$，

所以 $f(3)=35$。

注意到

$$f(1)+1=4=2^2,$$
$$f(2)+1=16=4^2,$$
$$f(3)+1=36=6^2.$$

下面证明：对任意的 n，有

$$f(n)=(2n)^2-1. \qquad ⑥$$

式⑥对于 $n=1,2,3$ 已成立，设式⑥对于 $n(n\geq 3)$ 成立，考虑 $n+1$ 时的情形，由条件可得

$$2+\frac{1}{n^2}<\frac{2n+1}{2n-1}+\frac{4n^2-1}{f(n+1)-4n-2}<2+\frac{2}{2n^2-1},$$

所以

$$\frac{(2n-1)^2(2n^2-1)}{4n^3-6n^2+2n+1}<\frac{f(n+1)}{2n+1}-2<\frac{n(2n-1)}{2n^3-3n^2-2n-1},$$

即 $(2n+1)^2+2(2n+1)-\frac{2(2n-1)}{4n^3-6n^2+2n+1}<f(n+1)<(2n+1)^2+2(2n+1)+\frac{2n+1}{2n^3-3n^2+2n-1}$，

从而

$$(2n+1)^2+2(2n+1)-1<f(n+1)<(2n+1)^2+2(2n+1)+1.$$

由 $f(n+1)$ 为整数，得

$$f(n+1)=(2n+1)^2+2(2n+1)=[2(n+1)]^2-1.$$

故由归纳法可知，式⑥对于任何正整数 n 皆成立，即 $f(n)=(2n)^2-1$。

再计算 $S(n)$，由

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

得

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$



评析 本题的求解遵循从特殊到一般的规律，以退为进，先求出数列 $f(n)$ 的前几项，从中寻找规律，然后猜想出通项公式，再用数学归纳法证明猜想的正确性，这种方法称为不完全数学归纳法.

当证实"猜想"是错误的，或者证不出"猜想"时，可以重新"猜想"，或者采用其他的证明方法. 因此，可以说，提出正确的"猜想"是证明的关键. 本题的难点是将题设条件进行恰当的代数变形，从而证明当 $n+1$ 时"猜想"成立.

例 12 （第 48 届 IMO 预选题）设 $c>2$，非负实数列 $a(1)$，$a(2)$，… 满足

(1) 对于任意的正整数 m、n，$a(m+n)\leqslant 2a(m)+2a(n)$；

(2) 对于任意的非负整数 k，$a(2^k)\leqslant \dfrac{1}{(k+1)^c}$.

证明：数列 $\{a(n)\}$ 有界.

解 定义 $a(0)=0$，则条件(1)对于所有的非负整数 m、n 成立.

引理 对于任意的非负整数 n_1，n_2，…，n_k，有：

(ⅰ) $a(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i)\leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} 2^i a(n_i)$；

(ⅱ) $a(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i)\leqslant 2k\sum\limits_{i=1}^{k} a(n_i)$.

引理的证明：(ⅰ) 当 $k=1$ 时，显然成立. 假设 k 时成立. 对于 $k+1$ 时，

$$a(\sum_{i=1}^{k+1} n_i)=a(n_1+\sum_{i=2}^{k+1} n_i)$$

$$\leqslant 2a(n_1)+2a(\sum_{i=1}^{k} n_{i+1})$$

$$\leqslant 2a(n_1)+2\sum_{i=1}^{k} 2^i a(n_{i+1})$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1} 2^i a(n_i).$$

(ⅱ) 对 d 用数学归纳法.

易证 $a(\sum\limits_{i=1}^{2^d} n_i)\leqslant 2^d\sum\limits_{i=1}^{2^d} a(n_i)$.

对于任意的正整数 k，存在非负整数 d，使得 $2^{d-1}<k\leqslant 2^d$.

则 $a(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i)=a(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i+\sum\limits_{i=k+1}^{2^d} 0)\leqslant 2^d\left[\sum\limits_{i=1}^{k} a(n_i)+\sum\limits_{i=k+1}^{2^d} a(0)\right]=2^d\sum\limits_{i=1}^{k} a(n_i)\leqslant 2k\sum\limits_{i=1}^{k} a(n_i)$.

回到原题.

设 $0=M_0<M_1<M_2<\cdots$ 是一个递增的无界数列，n 是任意的正整数.

设 $n=\sum\limits_{i=0}^{d}(\varepsilon_i 2^i)$，其中，$\varepsilon_i\in\{0,1\}(i=0,1,\cdots,d)$.

当 $i>d$ 时，定义 $\varepsilon_i=0$.



于是，存在正整数 f，使得 $M_f > d$.

由引理( )得 $a(n) = a\left[\sum_{k=1}^{f}\sum_{M_{k-1}\leqslant i<M_k}(\varepsilon_i 2^i)\right] \leqslant \sum_{k=1}^{f}2^k a\left[\sum_{M_{k-1}\leqslant i<M_k}(\varepsilon_i 2^i)\right]$.

因为在区间$[M_{k-1}, M_k)$内整数的数目小于 $M_k - M_{k-1}+1$，所以，由引理(ⅱ)得

$$
\begin{aligned}
a(n) &\leqslant \sum_{k=1}^{f}2^k a\left[\sum_{M_{k-1}\leqslant i<M_k}(\varepsilon_i 2^i)\right] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{f}2^k \cdot 2(M_k - M_{k-1}+1)\sum_{M_{k-1}\leqslant i<M_k}\varepsilon_i a(2^i) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{f}2^k \cdot 2(M_k - M_{k-1}+1)\max_{M_{k-1}\leqslant i<M_k}\{a(2^i)\} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{f}2^k \cdot 2(M_k+1)\cdot\frac{1}{(M_{k-1}+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{M_k+1}{M_{k-1}+1}\right)\cdot\frac{2^{k+1}}{(M_{k-1}+1)}.
\end{aligned}
$$

设 $M_k = 4^{2^k} - 1$，则 $a(n) \leqslant \sum_{k=1}^{f}4^{2^{k-1}}\cdot\frac{2^{k+1}}{(4^{2^{k-1}})^2} = 8\times 4^{-1}\sum\frac{1}{2^k} < 8\times 4^{-1}$.

因此，$\{a(n)\}$有界.

例 13 对 φ：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，记 $M_\varphi = \{f : \mathbf{N}\to\mathbf{Z}, f(x) > f(\varphi(x)), \forall x\in\mathbf{N}\}$. 试证明：若 $M_{\varphi_1} = M_{\varphi_2} \neq \varnothing$，则 $\varphi_1 = \varphi_2$.

证明 设 $f \in M_{\varphi_1}$，令

$$\varphi_1^{(n)}(x) = \varphi_1(\varphi_1(\cdots\varphi_1(x))\cdots)(n\text{ 个 }\varphi_1),$$

易知 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\forall x\in\mathbf{N}$，$f(\varphi_1^{(n)}(x)) < f(x)$. 所以 $x(=\varphi_1^{(0)}(x))$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_1^{(2)}(x)$，…，互不相同. 固定 $x_0\in\mathbf{N}$，令 $M = \{\varphi_1^{(k)}(x_0), k\in\mathbf{N}\cup\{0\}\}$ （x_0 的轨道）

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \overline{\in} M, \\ f(x) - n, & x\in M \end{cases} (n\in\mathbf{N})$$

若 $x \overline{\in} M$，则 $f_n(x) = f(x) > f(\varphi_1(x)) \geqslant f_n(\varphi_1(x))$.

若 $x\in M$，则 $f_n(x) = f(x) - n > f(\varphi_1(x)) - n = f_n(\varphi_1(x))$.

由于 $M_{\varphi_1} = M_{\varphi_2}$，所以 $f_n \in M_{\varphi_2}$，从而 $f(\varphi_2(x)) < f_n(x)$.

若 $\varphi_2(x_0) \overline{\in} M$，则

$$f(\varphi_2(x_0)) = f_n(\varphi_2(x_0)) < f_n(x_0) = f(x_0) - n,$$

当 n 足够大时，上式不可能成立，所以必有 $\varphi_2(x_0)\in M$，即存在 $k\in\mathbf{N}$ 使 $\varphi_2(x_0) = \varphi_1^{k}(x_0)$，于是对每个 $x\in\mathbf{N}$，均有 $k\in\mathbf{N}$（依赖于 x），使 $\varphi_2(x) = \varphi_1^{(k)}(x)$.

同样，$\forall x\in\mathbf{N}$ 均有 $h\in\mathbf{N}$，使 $\varphi_1(x) = \varphi_2^{(h)}(x)$.

于是当 $h > 1$ 时，便有



$$\varphi_1(x)=\varphi_2^{(k)}(x)=\varphi_2^{(k-1)}(\varphi_1^{(2)}(x))=\varphi_2^{(k-2)}(\varphi_1^{(4)}(x))$$
$$=\cdots=\varphi_1^{(2k)}(x).$$

其中 $k\in\mathbf{N}$ 使 $\varphi_1(\varphi_1^{(2k-1)}(x))=\varphi_1^{(2)}(\varphi_1^{(2k-2)}(x))$，但 $\varphi_1(x)$，$\varphi_1^{2}(x)$，…，互不相同，故必有 $h=1$，$k=1$，即 $\varphi_2=\varphi_1$.

例 14 求所有 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\frac{1}{f(1)f(2)}+\frac{1}{f(2)f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(n)f(n+1)}=\frac{f(f(n))}{f(n+1)}.$$

解 由于 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$，所以 $f(n)=n$ 为一个解.

对 $n=1$ 有 $f(f(1))f(1)=1$，因此 $f(1)=1$. 用 $n+1$ 替换 n 代入，有

$$\frac{f(f(n))}{f(n+1)}+\frac{1}{f(n+2)f(n+1)}=\frac{f(f(n+1))}{f(n+2)},$$

即 $$f(f(n))f(n+2)+1=f(f(n+1))f(n+1).$$

若 $f(n+1)=1$，则 $f(f(n+1))=1$，有 $f(f(n))f(n+2)=0$，不可能. 所以 $f(n)>1$，$n\geqslant 2$.

归纳证明：$f(f(n))<f(n+1)$.

当 $n=1$ 时，$f(2)>1=f(f(1))$，成立.

若 $f(n+1)>f(f(n))$，那么，$f(n+1)\geqslant f(f(n))+1$.

因此 $f(f(n))f(n+2)+1\geqslant f(f(n+1))f(f(n))+f(f(n+1))$.

由于 $n+1\geqslant 2$，$f(n+1)>1$，所以 $f(f(n+1))>1$，即 $f(n+2)>f(f(n+1))$，于是 f 满足 $f(n+1)>f(f(n))$.

下面证明，对满足 $f(n+1)>f(f(n))$，$n\in\mathbf{N}$ 的函数，必有 $f(n)=n$.

令 $\{f(f(1)),f(2),f(f(2)),f(3),f(f(3)),\cdots,f(n),f(f(n)),\cdots\}$，

则该集合有最小的元素，由于 $f(n+1)>f(f(n))$，所以最小值不能为 $f(n+1)$，于是，必为 $f(f(n))$ 的形式.

若有 n 使 $f(n)=1$，必有 $n=1$，否则 $1=f(n)>f(f(n-1))$，不可能.

因此，$f(1)=1$，且 $f(n)>1$，对 $n>1$.

考虑 $f:\{n\geqslant 2\}\to\{n\geqslant 2\}$，同样论证，可得到 $f(2)=2$，$f(n)>2$.

对 $n>2$ 由归纳法可证明：$f(k)=k$，且对 $n>k$，有 $f(n)>k$.

故这个问题的唯一解为 $f(n)=n$，$n\in\mathbf{N}$.

评析 此题的证明有一定的难度，特别是得到 $f(n+1)>f(f(n))$ 后，证明 $f(n)=n$. 这是1977年第9届IMO的一道试题.

例 15 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b],\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$



证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

分析 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$，将积分不等式转化为函数不等式即可

解 令 $F(x)=f(x)-g(x)$，$G(x)=\int_a^x F(t)\mathrm{d}t$，

由题设 $G(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，

$G(a)=G(b)=0$，$G'(x)=F(x)$，

从而 $\int_a^b xF(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\mathrm{d}G(x)=xG(x)\Big|_a^b-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x$，

由于 $G(x)\geqslant 0$，$x\in[a,b]$，故有 $-\int_a^b G(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$，

即 $\int_a^b xF(x)\mathrm{d}x\leqslant 0$，

因此 $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

注 引入变限积分转化为函数不等式，是证明积分不等式的常用的方法

将微积分不等式转化为函数不等式来解，首先我们要做辅助函数，我们所做的辅助函数求导应该比较简单，为证明不等式，通过恒等变形，尽量使分母不出现变量，这样我们所做的辅助函数就显得比较简单，求导就比较容易，这样判别它的符号，大于零小于零都比较容易所以第一步就是求函数，第二步就是求导，第三步就是求出函数端点的值

一般来讲，可以得到端点的函数值等于零或者是其他的确定的数值，根据函数的端点性和值，我们马上可以得出结果

例 16 一阶微分不等式 $y'+p(x)y\geqslant q(x)$ 的通解是 $y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x\right]$，$\forall g(x)\geqslant 0$ 式中等号成立，当且仅当式中 $g(x)=0$ 成立

证明 设 $y=c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，这里 $c(x)$ 是待定函数，则

$$y'+p(x)y=c'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}-c(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}+p(x)c(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

$$=c'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\geqslant q(x)，故\ c'(x)\geqslant q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}，$$

所以 $c'(x)=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}+g(x)$，$\forall g(x)\geqslant 0$，

$c(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x$，$g(x)\geqslant 0$，

代入所设式即得通解式.

说明 由例 16 可得积分不等式 $\int_a^x p(x)f(x)\mathrm{d}x+f(x)\geqslant q(x)$ 的通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int[q'(x)+g'(x)]\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right\}，g(x)\geqslant 0.$$



证明 设 $\int p(x)f(x)\mathrm{d}x + f(x) = q(x) + g(x) = Q(x)$, $g(x) \geq 0$,两边求导得

$$p(x)f(x) + f'(x) = Q'(x)$$

利用例 16 中等号成立的结果,可得

$$f(x) = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left\{\int[q'(x) + g'(x)]e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right\},\ g(x) \geq 0.$$

例 17 $f(x)$ 是$[a,b]$上的上凸(下凸)函数的充分条件是对任意 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a,b]$,当 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ 且 $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|$ 时有

$$f(x_1) + f(x_2) \underset{(\geq)}{\leq} f(y_1) + f(y_2)$$

证明 以下结论是明显的:对$[a,b]$上的上凸(下凸)函数 $f(x)$,设 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a,b]$,$x_1 \leq y_1 \leq y_2 \leq x_2$,则弦 B_1B_2 在弦 A_1A_2 的上方(下方),其中 A_i,B_i 的坐标分别为$(x_i, f(x_i))$,$(y_i, f(y_i))$,$i = 1, 2$,见图 6-1.



图 6-1

必要性:设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的上凸(下凸)函数,显然条件 $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|$ 等价于 $x_1 \leq y_1 \leq y_2 \leq x_2$,如图 6-1 所示,设直线 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ 与弦 B_1B_2,A_1A_2 分别交于 C,C_1 两点,则易知 C,C_1 的纵坐标分别为 $\frac{1}{2}[f(y_1) + f(y_2)]$ 和 $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$,由上述结论有 $\frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)] \underset{(\geq)}{\leq} \frac{1}{2}[f(y_1) + f(y_2)]$,即 $f(x_1) + f(x_2) \underset{(\geq)}{\leq} f(y_1) + f(y_2)$.

充分性:由于对任意 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [a,b]$,当 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ 且 $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|$ 时有 $f(x_1) + f(x_2) \underset{(\geq)}{\leq} f(y_1) + f(y_2)$.

特别取 $y_1 = y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$,则

$$y_1 + y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_1 + x_2}{2} = x_1 + x_2,$$

且 $|y_1 - y_2| \leq |x_1 - x_2|$,于是对任意 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 有



$$f(x_1)+f(x_2)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

所以 $f(x)$ 是$[a,b]$上的上凸(下凸)函数

说明 作函数变换,可得 设$f(x)$是$[a,b]$上的正值函数,且$F(x)=\ln f(x)$是$[a,b]$上的上凸(下凸)函数,则对$x_1,x_2,y_1,y_2\in[a,b]$,当$x_1+x_2=y_1+y_2$且$|y_1-y_2|\leqslant|x_1-x_2|$时有$f(x_1)f(x_2)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}f(y_1)f(y_2)$。

例 18 已知函数$y=f(x)$在$D(D$可以为$[a,b]$或$(a,b))$内可导,设$x_0\in D$,$x\in D$,则

(1) 当$f(x)$为上凸函数时,$f(x)\leqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$;

(2) 当$f(x)$为下凸函数时,$f(x)\leqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$。

证明 过点$(x_0,f(x_0))$作曲线$y=f(x)$的切线l,则l的方程为$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$,由凸函数的性质知,

(1) 当$f(x)$为上凸函数时,曲线$y=f(x)$,$x\in D$在切线l的下方,所以$f(x)\leqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$。

(2) 当$f(x)$为下凸函数时,曲线$y=f(x)$,$x\in D$在斜线l的上方,所以$f(x)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$。

说明 (Ⅰ) 特别地,

当已知函数$y=f(x)$,$x\in[a,b]$为连续凸函数,则

(1) 当$f(x)$为上凸函数时,$f(x)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$;

(2) 当$f(x)$为下凸函数时,$f(x)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$。

设$A(a,f(a))$、$B(b,f(b))$,则

直线AB的方程为$y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$,

由图 6-2、图 6-3 知结论(2)成立

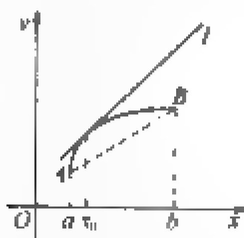


图 6-2

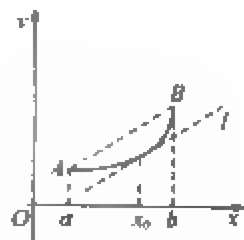


图 6-3

(Ⅱ) 应用上述结论,可证明一系列不等式,如:

若$a,b>0$且$a+b=1$,则

$$\frac{3}{2} < \frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{b^3+1} \leqslant \frac{16}{9}$$

证明 设 $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$，$x\in(0,1)$，由 $y=f(x)$ 图象知(图 6-4)，$f(x)$ 为上凸函数

(1) 设 $A(0,f(0))$，$B(1,f(1))$，

则弦 AB 的方程为 $y=-\frac{1}{2}x+1$。

由说明(Ⅰ)知 $\quad f(a)>-\frac{1}{2}a+1$，

$$f(b)>-\frac{1}{2}b+1,$$

所以 $f(a)+f(b)>-\frac{1}{2}(a+b)+2=\frac{3}{2}$，

即 $\frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}>\frac{3}{2}$ 成立 ①

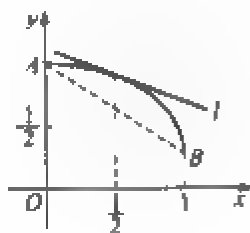


图 6-4

(2) 取 $x_0=\frac{1}{2}$，则 $f(x_0)=\frac{8}{9}$，

$$f'(x_0)=-\frac{3x_0^2}{(x_0^3+1)^2}=-\frac{16}{27},$$

过点 $\left(\frac{1}{2},\frac{8}{9}\right)$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l，则 l 的方程为 $y=-\frac{16}{27}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{9}$，由例中结论知 $f(x)\leqslant-\frac{16}{27}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{9}$。

所以 $\quad f(a)\leqslant-\frac{16}{27}\left(a-\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{9}$，

$$f(b)\leqslant-\frac{16}{27}\left(b-\frac{1}{2}\right)+\frac{8}{9},$$

故 $\quad f(a)+f(b)\leqslant-\frac{16}{27}(a+b-1)+\frac{16}{9}=\frac{16}{9}$，

即 $\quad \frac{1}{a^3+1}+\frac{1}{b^3+1}\leqslant\frac{16}{9}$， ②

综合式①、②得欲证不等式成立

也可直接得 $\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

即 $\quad \frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}\leqslant\frac{16}{9}$。

还可类似证明如下不等式，过程略。

① 若 $a,b,c>0$，且 $a+b+c=1$，则



$$\frac{5}{2}<\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\leqslant\frac{27}{10}$$

② 若 $a、b、c、d>0$，且 $a+b+c+d=1$，则

$$\frac{7}{2}<\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}+\frac{1}{1+d^3}\leqslant\frac{256}{65}$$

③ 若 $a_1、a_2、a_3、a_4\in\mathbf{R}^+$ 且 $a_1+a_2+a_3+a_4=1$，则

$$\frac{a_1^3}{1-a_1}+\frac{a_2^3}{1-a_2}+\frac{a_3^3}{1-a_3}+\frac{a_4^3}{1-a_4}\geqslant\frac{1}{12}$$

④ 若 $a、b、c、d\in\mathbf{R}^+$ 且 $a+b+c+d=1$，则

$$\frac{13}{4}<\frac{1}{(1+a^2)^2}+\frac{1}{(1+b^2)^2}+\frac{1}{(1+c^2)^2}+\frac{1}{(1+d^2)^2}\leqslant\frac{824}{289}$$

⑤ 若 $a、b、c>0$ 且 $a+b+c=1$，则

$$\sqrt[3]{2}+2<\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{b+1}+\sqrt[3]{c+1}\leqslant\sqrt[3]{36}$$

能力测试6

1．(第15届"希望杯"高一年级竞赛题)已知集合 M 是满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体

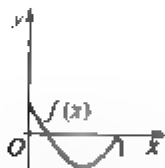
(1) 当 $x\in[0,+\infty)$ 时，函数值为非负实数；

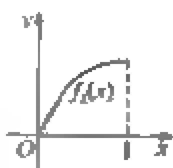
(2) 对于任意 $s、t\in[0,+\infty)$，都有 $f(s)+f(t)\leqslant f(s+t)$．在函数 $f_1(x)=x$，$f_2(x)=2^x-1$，$f_3(x)=\ln(x+1)$ 中，属于 M 的有 (　　)

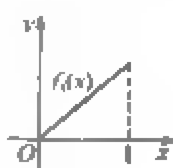
A．$f_1(x)$ 和 $f_2(x)$　　　B．$f_1(x)$ 和 $f_3(x)$

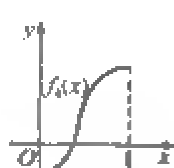
C．$f_2(x)$ 和 $f_3(x)$　　　D．$f_1(x)$、$f_2(x)$ 和 $f_3(x)$

2．(2002年北京高考理科试题)如图所示，$f_i(x)(i=1,2,3,4)$ 是定义在$[0,1]$上的四个函数，其中满足性质："对$[0,1]$中的任意 x_1 和 x_2，任意 $\lambda\in[0,1]$，$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 恒成立"的只有 (　　)









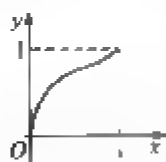
A．$f_1(x)$，$f_3(x)$　　　B．$f_2(x)$

C．$f_2(x)$，$f_3(x)$　　　D．$f_4(x)$

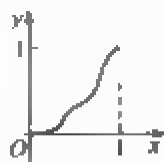
3．(2005年辽宁省高考理科试题)给定函数 $y=f(x)$ 的图象在下列图中，并且对任意 $a_1\in$



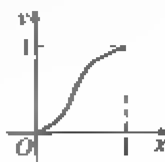
$(0,1)$，由关系 $a_{n+1}=f(a_n)$ 得到的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^+)$，则该函数的图象是（　　）



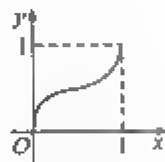
A



B.



C



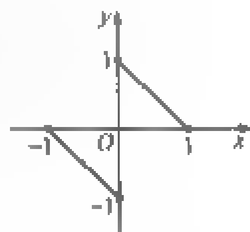
D

4．集合 A 是由适合以下性质的函数 $f(x)$ 构成的：对于任意的 $x>0$，$y>0$，且 $x\neq y$，都有 $f(x)+2f(y)>3f\left(\frac{x+2y}{3}\right)$，试判断（回答是或不是）：

(1) $f_1(x)=\log_2 x$ ________ 在集合 A 中；

(2) $f_2(x)=(x+2)^2$ ______ 在集合 A 中。

5．设 $f(x)$、$g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数，当 $x<0$ 时，$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)>0$，且 $g(-3)=0$，则不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$ 的解集是________



6．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数且连续，当 $x>0$ 时，有 $f'(x)<0$，则不等式 $f(\lg x)>f(1)$ 的解集为________。

7．$f(x)$ 的图象是如右图的两条线段（缺一端点），它的定义域是 $[-1,0)\cup(0,1]$，则不等式 $f(x)-f(-x)>-1$ 的解集是________

8．已知偶函数 $f(x)$ 提供以下信息：

x	0	1	2	3	$x\in[0,2]$	$x\in[2,3]$
$f(x)$	-1	0	1	0	单调递增	单调递减

当 $x\in[-3,3]$ 时，不等式 $x^3\cdot f(x)<0$ 的解为________。

9．（第53届罗马尼亚数学奥林匹克竞赛试题（第一轮））(1) 设 a 是大于1的实数，f、g、h：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是实函数，且 $f(x)+g(x)+h(x)\geqslant 0$ 对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 成立，证明 $a^{f(x)}+a^{g(x)}+a^{h(x)}=3$ 有解的充分条件是函数 f、g、h 有公共的根

(2) 解方程 $5^{[illegible]}+2^{[illegible]}+4^{[illegible]}=3$.

10．设连续的单调函数 f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(0)=1$，且满足不等式

$$f(x+y)\geqslant f(x)f(y)-f(xy)+1. \qquad ①$$

试求 $f(x)$

11．设 $f(x)$、$g(x)$ 都是定义在正整数集上的增函数，且对任意的 $k\in\mathbf{N}^+$，都有 $f(k+1)+g(0)>f(k)+g(k-1)$，数列 $\{a_n\}$ 是集合 $M=\{f(t)+g(s)\mid 0\leqslant s<t,\ s,t\in\mathbf{N}\}$ 中的所有数从小到大排列而成的数列，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。



12. 设 $A=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，$f$ 是 A 到实数集 $\mathbf{R}$ 的映射，满足：

(1) $f(1)=1$；

(2) $f(x) \geqslant 0$，$x \in A$，

(3) 如果 $x, y, x+y \in A$，则 $f(x+y) \geqslant f(x)+f(y)$.

求证：对任意的 $x \in A$，有 $f(x) \leqslant 2x$.

13. (第 31 届 IMO 预选题) 设 $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$ 是满足下列条件的一个映射

(ⅰ) 对一切非零数 $\alpha \in \mathbf{Q}$，$f(\alpha)>0$，$f(0)=0$；

(ⅱ) $f(\alpha\beta)=f(\alpha) \cdot f(\beta)$；

(ⅲ) $f(\alpha+\beta) \leqslant \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$. 设 x 是一个整数且 $f(x) \neq 1$

对任意整数 x，求证：$f(1+x+x^2+\cdots+x^n)=1 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$

14. 设 a，r 都是大于 1 的给定的实数，函数 $f: \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ 满足：对任意 $x>0$，都有 $f^2(x) \leqslant a x^r f\left(\frac{x}{a}\right)$

(1) 若对任意 $0<x<\frac{1}{2^{2005}}$，都有 $f(x)<2^{2005}$，证明，对任意 $x>0$，都有 $f(x) \leqslant a^{1-r} x^r$

(2) 构造一个满足条件(不满足(1)的条件)的函数 f，使得对任意 $x \in \mathbf{R}^+$，都有 $f(x)>a^{1-r} x^r$

15. (第 26 届美国数学奥林匹克试题) 设非负整数 $f(1), f(2), \cdots, f(1997)$ 满足 $f(i)+f(j) \leqslant f(i+j) \leqslant f(i)+f(j)+1 (1 \leqslant i, j, i+j \leqslant 1997)$，证明存在实数 x，对所有 $1 \leqslant n \leqslant 1997$，满足 $f(n)=[nx]$.

16. (首届中国东南地区数学奥林匹克试题) (1) 是否存在正整数的无穷数列 $\{f(n)\}$，使得对任意的正整数 n，都有 $f^2(n+1) \geqslant 2f(n)f(n+2)$.

(2) 是否存在正无理数的无穷数列 $\{f(n)\}$，使得对任意的正整数 n，都有 $f^2(n+1) \geqslant 2f(n)f(n+2)$.

17. 设 $\mathbf{N}=\{0, 1, 2, \cdots\}$，给定一个 $k \in \mathbf{N}$，试求出所有的函数 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$，使得对于每一个 $n \in \mathbf{N}$，都有 $f(n)<f(n+1)$，及 $f(f(n))=n+2k$

18. 正整数无穷数列 $\{f(n)\}$ 满足 $\frac{f(n-1)+f(n+1)}{2} \leqslant f(n)(n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}^*)$ 设坐标平面内点 P_n 的坐标是 $(n, f(n))$，求证：存在一条直线，它通过点集 $\{P_n\}$ 中无数个点

19. 设 X 是一个有限集合，法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E(偶数个元素组成的子集) 都对应一个实数 $f(E)$，且满足条件

(1) 存在一个偶子集 D，使得 $f(D)>1990$；

(2) 对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A、B 有 $f(A \cup B)=f(A)+f(B)-1990$.

求证：存在 X 的子集 P 和 Q，满足

(ⅰ) $P \cap Q=\varnothing$，$P \cup Q=X$；

(ⅱ) 对 P 的任何非空偶子集 S，有 $f(S)>1990$；

(ⅲ) 对 Q 的任何偶子集 T，有 $f(T) \leqslant 1990$.

20. (2007 年全国高中数学联合竞赛湖北省预赛试题) 已知数列 $\{f(n)\}$ 满足递推关系



式：$f(n+1)=\frac{1}{2}f^2(n)-f(n)+2$，$n\geqslant 1$，$n\in\mathbf{N}$.

(1) 若 $f(1)=4$，证明 ① 当 $n\geqslant 2$ 时，有 $f(n+1)\geqslant 2f(n)$；② 当 $n\geqslant 1$ 时，有 $f(n+1)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^n f(n)$

(2) 若 $f(1)=1$，证明：当 $n\geqslant 5$ 时，有 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}<n-1$.

21. α 凸函数的定义：

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 的子集 D 上的函数，常数 $\alpha\in(0,1)$，若对 $\forall x_1, x_2\in D$，都有 $\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in D$，且

$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\geqslant f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2], \qquad ①$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的 α 凸函数；当 $-f(x)$ 为 D 上的 α 凸函数时，称 $f(x)$ 为 D 上的 α 凹函数.

当 ① 式中 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，通常称 $f(x)$ 为 D 上的中点凸函数，又称琴生(Jensen)意义下的凸函数，简称 J 凸函数

设 $f(x)$ 为 D 上的 α 凸函数，则

(1) $f(x)$ 必为 D 上的 J 凸函数，即对 $\forall x_i\in D(i=1,2)$，都有 $f(x_1)+f(x_2)\geqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

(2) $f(x)$ 为 D 上的 $\frac{\alpha^n}{\alpha^n+(1-\alpha)^n}(n\in\mathbf{N}, n\geqslant 1)$ 凸函数，即对 $\forall x_i\in D(i=1,2)$，都有

$$\frac{\alpha^n f(x_1)+(1-\alpha)^n f(x_2)}{\alpha^n+(1-\alpha)^n}\geqslant f\left[\frac{\alpha^n x_1+(1-\alpha)^n x_2}{\alpha^n+(1-\alpha)^n}\right].$$

22. (根据美国第 31 届奥林匹克试题改编) 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，确定所有满足下列条件的连续函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(0)=0$，$f(x^2-y^2)\geqslant xf(x)-yf(y)$，$\forall x, y\in\mathbf{R}$.

23. (IMO 中国国家集训队选拔考试题，2003 年) 求所有正整数集上到实数集的函数 f，使得

(1) 对任意 $n\geqslant 1$，$f(n+1)\geqslant f(n)$；

(2) 对任意 m, n，$(m, n)=1$，有 $f(mn)=f(m)f(n)$.

24. 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0$，$f'(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$. 证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1)$.

25. 设实函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in(a, b)$，实数 $P_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$，$n\in\mathbf{N}$

记 $\lambda_n=\sum_{i=1}^{n}P_i$，$A_n=\sum_{i=1}^{n}P_i x_i/\lambda_n$，$B_n=\sum_{i=1}^{n}P_i f(x_i)/\lambda_n$.

若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上为凸函数，则 $\varphi(n)=\lambda_n[f(A_n)-B_n]$ 是 n 的递增函数

26. 定义在整数集上的函数 f 满足 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(n+2)=f[n+2-f(n+1)]+f[n+1-f(n)]$ $(n\geqslant 1)$. 求证

(1) $0\leqslant f(n+1)-f(n)\leqslant 1$；

(2) 若 $f(n)$ 为奇数，则 $f(n+1)=f(n)+1$；

(3) 试求适合 $f(n)=2^{10}+1$ 的一切 n 值.



附录 高调函数及其应用

在本附录中，将给出高调函数与低调函数的定义，并讨论其简单性质，论述它在函数不等式求解中的基底作用.

1 高(低)调函数的定义

单调函数的定义 设区间 $D(\subseteq \mathbf{R})$，若对任意的 $x\in D$，对增量 $\Delta x>0$，有 $x+\Delta x\in D$，且 $f(x+\Delta x)>f(x)$(或 $f(x+\Delta x)<f(x)$)，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调递增函数(或单调递减函数).

这里的增量 Δx 是一个变量，这启发我们联想：当增量 Δx 是一个常量时，会出现什么新的结果？通过研究，我们得到了如下单调函数的推广——高(低)调函数.

定义 设 $D(\subseteq \mathbf{R}^n)$，$A$ 是一个常向量.

(1) 若对任意的 $X\in M(\subseteq D)$，都有 $X+A\in D$，且 $f(X+A)\geqslant f(X)$，则称函数 $f(X)(X\in M)$ 关于 A 是高调的，或称 $f(X)(X\in M)$ 是 A 高调函数.

(2) 若对任意的 $X\in M(\subseteq D)$，都有 $f(X+A)\leqslant f(X)$，则称函数 $f(X)(X\in M)$ 关于 A 是低调的，或称 $f(X)(X\in M)$ 是 A 低调函数.

当等号不成立，即 $f(X+A)>f(X)$(或 $f(X+A)<f(X)$)时，则称函数 $f(X)(X\in M)$ 关于 A 是严格高(或低)调的，或称 $f(X)(X\in M)$ 是 A 严格高(或低)调函数.

在一维空间，令 $A=l(l\neq 0)$，$f(x)$ 是定义在 D 上的函数，若对 $x\in M(\subseteq D)$，有 $x+l\in D$，且

(1) $f(x+l)\leqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 为 M 上的 l 低调函数；

(2) $f(x+l)\geqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 为 M 上的 l 高调函数.

我们把这样的函数统称为 M 上的间距为 l 的单调函数，l 高(低)调函数简称为 l 单调函数，把 M 称作 l 单调函数的单调区间.

注 文献[1]中研究了如下的 l 凸函数：

设 $f(x)$ 是定义在实线性空间 X 中的凸集 M 上的实值连续函数.

若对 $\forall x_1,x_2\in D(\subseteq M)$，$\lambda\in(0,1)$ 和给定的常数 l 都有 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2+l\in M$，且

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2+l]\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2), \tag{①}$$

则称 $f(x)$ 为 D 上的 l 凸函数；

当 $-f(x)$ 为 D 上的 l 凸函数时，则称 $f(x)$ 为 D 上的 l 凹函数.

当 $f(x)$ 为 M 上的 l 凸(凹)函数时，我们在式①中取 $x_1=x_2=x$，得到 $x\in M$，$x+l\in D$ 时 $f(x+l)\leqslant f(x)$，或 $f(x+l)\geqslant f(x)$，可见 M 上的 l 凸(凹)函数，均为 M 上的 l 高(低)调函数.

通常我们说的任意区间 M 上的单调函数 $f(x)$，等价于对于充分小的正数 ε 和任意给定的 $l\in(0,\varepsilon)$，$f(x)$ 都是区间 $D=\{x|x\in M$，且 $x+l\in M\}$ 上的 l 高(低)调函数.

l 高(或低)调函数是内涵非常丰富的一个函数类，我们已对其作了较为深入的研究，得到了不少一般化的结论.

2 高(低)调函数的简单性质

2.1 在一维空间函数的高(低)调性

性质1 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,a+2b]$ $(b>0)$ 上的连续的增函数，$0<l\leqslant b$，则 $f(x)$ 是 $[a,a+b]$ 上的 l 高调函数，也是 $[a+b,a+2b]$ 上的 $(-l)$ 低调函数.

证明 设 $x\in[a,a+b]$，则 $x+l\in[a,a+2b]$，且 $f(x)\leqslant f(x+l)$，所以 $f(x)$ 是 $[a,a+b]$ 上的 l 高调函数.

设 $x\in[a+b,a+2b]$，则 $x-l\in[a,a+2b]$，且 $f(x)\geqslant f(x-l)$，所以 $f(x)$ 是 $[a+b,a+2b]$ 上的 $(-l)$ 低调函数.

性质2 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,a+2b]$ $(b>0)$ 上的连续的减函数，$0<l\leqslant b$，则 $f(x)$ 是 $[a,a+b]$ 上的 l 低调函数，也是 $[a+b,a+2b]$ 上的 $(-l)$ 高调函数.

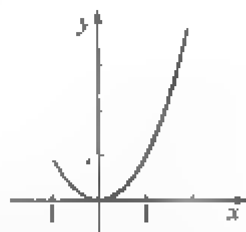
证明 设 $x\in[a,a+b]$，则 $x+l\in[a,a+2b]$，且 $f(x)\geqslant f(x+l)$，所以 $f(x)$ 是 $[a,a+b]$ 上的 l 低调函数.

设 $x\in[a+b,a+2b]$，则 $x-l\in[a,a+2b]$，且 $f(x)\leqslant f(x-l)$，所以 $f(x)$ 是 $[a+b,a+2b]$ 上的 $(-l)$ 高调函数.

(1) 由于连续函数在定义域(或其子区间)上必具有单调区间，因而也必具有高(低)调性.

从上面两个性质可见，高(低)调函数是广泛存在的，函数的高(或低)调性与函数的单调性、凸性一样，是任何连续函数(在其定义域或定义域的子区间)都具有的，是自然界的客观规律在数学中的反映.

(2) 定义在区间 M 上的单调函数 $f(x)$ 一定是 M(或其子区间)上的高(低)调函数，但定义在区间 M 上的高(低)调函数 $f(x)$，则不一定是 M 上的单调函数.



如 $f(x)=x^2$，$x\in[-1,+\infty)$，但有 $f(x)\leqslant f(x+2)$，因此它是区间 $[-1,+\infty)$ 上的2高调函数，但它不是区间 $[-1,+\infty)$ 上的单调函数.见右图.

当 M 无界时，M 上的单调函数 $f(x)$ 必是高(低)调函数.

(3) M 上的高(低)调函数的关系式以等式成立时，即 $f(x+l)=f(x)$，若 $l\neq0$，则 $f(x)$ 是 M 上的周期函数，l 是它的一个周期.

因此，高(低)调函数的内涵相当广泛，它包括了通常的区间单调函数(单调区间可能不



同）和周期函数.

性质 3 （高(低)调函数的构造）取 D 上周期函数 $g(x)(=g(x+a))$ 和 D 上的(严格)增(减)函数 $h(x)$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$，$x\in D$ 是 a(严格)高(低)调函数.

当 $g(x)=0$ 时，$f(x)$ 即为 D 上的单调增(减)函数，可见高(低)调函数是单调增(减)函数概念的推广.

2.2 高(低)调函数的通性

性质 4 若 $f(X)(X\in M)$ 是 A 高调函数，则 $-f(X)(X\in M)$ 是 A 低调函数.

性质 5 若 $f(X)(X\in M)$ 是 A 高调函数，对 $\forall X\in M$，都有 $X+kA\in M(k\in \mathbf{N}^+)$，则 $f(X)(X\in M)$ 是 kA 高调函数.

性质 6 若 $f_i(X)(X\in M, i=1,2,\cdots,n)$ 都是 A 高(低)调函数，则 $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(X)$ 也是 A 高(低)调函数.

性质 7 若正值函数 $f_i(X)(X\in M, i=1,2,\cdots,n)$ 都是 A 高(低)调函数，则 $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(X)$ 也是 A 高(低)调函数.

性质 4～7 利用高(低)调函数的定义可证，这里略去.

3 高(低)调函数的应用

高(低)调函数可作为高维空间的函数不等式的基底不等式，用来表示函数不等式的通解.

例 设 $f(x):\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，试求函数不等式 $f(x+1)\geqslant\frac{x+1}{x}f(x)$ 的通解.

解 令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则 $f(x+1)\geqslant\frac{x+1}{x}f(x)$ 等价于 $\frac{f(x+1)}{x+1}\geqslant\frac{f(x)}{x}$，即 $g(x+1)\geqslant g(x)$.

故所给函数不等式的通解为 $f(x)=xg(x)$，$x\in\mathbf{R}^+$，其中 $g(x)$ 是任意的 1 高调函数.

取特殊的 1 高调函数，我们可以得到所给函数不等式的一系列特解.

令 $g(x)=ax+b(a\geqslant 0)$，则 $g(x+1)-g(x)=a\geqslant 0$，代入通解式，得到一个特解：$f(x)=ax^2+bx$，$x\in\mathbf{R}^+$，$a\geqslant 0$.

令 $g(x)=x^2-x$，则 $g(x+1)-g(x)=2x>0$，代入通解式，得到一个特解：$f(x)=x^3-x^2$，$x\in\mathbf{R}^+$.

令 $g(x)=\frac{x+1}{x+2}$，$x\in\mathbf{R}^+$，则 $g(x+1)-g(x)=\frac{1}{(x+2)(x+3)}>0$，代入通解式，得到一个特解：$f(x)=\frac{x^2+x}{x+2}$，$x\in\mathbf{R}^+$.

下面我们研究一般情形.

为方便计，约定：符号 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$AX=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n)$，

$X+A=(x_1+a_1,x_2+a_2,\cdots,x_n+a_n)$，余可类推，不一一指出.



定理1 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq\vec{0}$，则函数不等式

$$f(x_1+a_1,x_2+a_2,\cdots,x_n+a_n)\geqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+b$$

的通解为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\left(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\right)b,$$

这里 $\sum_{i=1}^{n}a_ic_i=1$，$g(X)$ 是任意的 A 高调函数.

证明 当 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq\vec{0}$ 时，存在 $C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，使 $\sum_{i=1}^{n}a_ic_i=1$.

$f(x_1+a_1,x_2+a_2,\cdots,x_n+a_n)-\left[\sum_{i=1}^{n}c_i(x_i+a_i)\right]b\geqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\left(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\right)b$.

令 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\left(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\right)b$，则 $g(X+A)\geqslant g(X)$.

因此，所给函数不等式的通解为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\left(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\right)b$，这里 $\sum_{i=1}^{n}a_ic_i=1$，$g(X)$ 是任意的 A 高调函数.

定理2 设 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq\vec{0}$，$\lambda>0$，且 $\lambda\neq1$，则函数不等式

$$f(x_1+a_1,x_2+a_2,\cdots,x_n+a_n)\geqslant\lambda f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+b$$

的一个通解式为 $f(X)=\frac{b}{1-\lambda}+\lambda^{\sum c_ix_i}g(X)$，

这里 $\sum_{i=1}^{n}a_ic_i=1$，函数 $g(X)$ 是任意的 A 高调函数.

证明 当 $b=0$ 时，若 $f(X)$ 是正值函数，则

$$f(X+A)\geqslant\lambda f(X)\Leftrightarrow\ln f(X+A)\geqslant\ln f(X)+\ln\lambda.$$

在定理1中作替换 $\ln g(X)\to g(X)$，$\ln\lambda\to b$，$\ln f(X)\to f(X)$，可得

$$\ln f(X)=\ln g(X)+\left(\sum_{i=1}^{n}c_ix_i\right)\ln\lambda，所以\ f(X)=\lambda^{\sum c_ix_i}g(X).$$

当 $b\neq0$ 时，$f(X+A)\geqslant\lambda f(X)+b$ 即 $f(X+A)-\frac{b}{1-\lambda}\geqslant\lambda\left[f(X)-\frac{b}{1-\lambda}\right]$.

不难验证，$f(X)=\frac{b}{1-\lambda}+\lambda^{\sum c_ix_i}g(X)$ 是它的一个通解式.

注 这里 $f(X)$，$g(X)$ 不一定是正值函数.

定理3 设 $f(X)$ 定义在 $(\mathbf{R}^+)^n$ 上，常向量 $A\in(\mathbf{R}^+)^n$，则函数不等式

$$f(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n)\geqslant f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+b$$

的通解为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(x_1,x_2,\cdots,x_n)+b\ln\prod_{i=1}^{n}x_i^{c_i}$.



这里 $\prod_{i=1}^{n} a_i = e$，$g(e^X)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上任意的 $\ln A$ 高调函数.

证明 在定理1中作替换 $\ln X \to X$，$\ln A \to A$，$f(X) \to f(\ln X)$，$g(X) \to g(\ln X)$，可得函数不等式 $f(AX) \geqslant f(X) + b$ 的通解为 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_1, x_2, \cdots, x_n) + b\ln\prod_{i=1}^{n} x_i$，这里 $\prod_{i=1}^{n} a_i = e$，$g(XA) \geqslant g(X)$ 即 $g(e^{\ln X + \ln A}) \geqslant g(e^{\ln X})$，说明 $g(e^X)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上任意的 $\ln A$ 高调函数.

定理4 设 $\lambda > 0$，且 $\lambda \neq 1$，$f(X)$ 定义在 $(\mathbf{R}^+)^n$ 上，常向量 $A \in (\mathbf{R}^+)^n$，则函数不等式

$$f(a_1x_1, a_2x_2, \cdots, a_nx_n) \geqslant \lambda f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + b$$

的通解为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{b}{1-\lambda} + g(x_1, x_2, \cdots, x_n) + b\ln\prod_{i=1}^{n} x_i,$$

这里 $\prod a_i = e$，$g(e^X)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上任意的 $\ln A$ 高调函数.

证明 在定理2中作替换 $\ln X \to X$，$\ln A \to A$，$f(X) \to f(\ln X)$，$g(X) \to g(\ln X)$，可得函数不等式 $f(AX) \geqslant \lambda f(X) + b$ 的通解为

$$f(X) = \frac{b}{1-\lambda} + \lambda^{\prod x_i} g(X),$$

这里 $\prod a_i = e$，$g(e^X)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上任意的 $\ln A$ 高调函数.

说明 可作为高维空间函数不等式的基不等式的，常用的还有：反低(高)调函数、周期函数、反周期函数、低(高)调奇(偶)函数. 下面给出定义.

反低(高)调函数定义

设 $D(\subseteq \mathbf{R}^n)$，$A$ 是一个常向量.

若对任意的 $X \in D$，都有 $f(X+A) \leqslant -f(X)$，则称函数 $f(X)(X \in D)$ 关于 A 是低调的，或称 $f(X)(X \in D)$ 是 A 的反低调函数.

若对任意的 $X \in D$，都有 $f(X+A) \geqslant -f(X)$，则称函数 $f(X)(X \in D)$ 关于 A 是高调的，或称 $f(X)(X \in D)$ 是 A 的反高调函数.

当等号不成立时，则称函数 $f(X)(X \in D)$ 关于 A 是严格低(高)调的，或称 $f(X)(X \in D)$ 是 A 的严格反低(高)调函数.

周期函数定义

对于函数 $y = f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时 $f(x+T) = -f(x)$ 都成立，那么就把函数 $y = f(x)$ 叫做反周期函数，不为零的常数 T 叫做函数的周期.



反周期函数定义

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得当 x 取定义域内的每一个值时，$f(x+T)=-f(x)$ 都成立，那么就把函数 $y=f(x)$ 叫做反周期函数。不为零的常数 T 叫做函数的周期。

高(低)调奇函数定义

设 $D(\subseteq \mathbb{R}^n)$，$A$ 是一个常向量。

若对任意的 $X\in D$，都有 $f(A-X)\leqslant -f(X)$，则称奇函数 $f(X)(X\in D)$ 关于 A 是低调的，或称 $f(X)(X\in D)$ 是 A 的低调奇函数；

若对任意的 $X\in D$，都有 $f(A-X)\geqslant -f(X)$，则称奇函数 $f(X)(X\in D)$ 关于 A 是高调的，或称 $f(X)(X\in D)$ 是 A 的高调奇函数。

当等号不成立时，则称函数 $f(X)(X\in D)$ 关于 A 是严格低(高)调的，或称 $f(X)(X\in D)$ 是 A 的严格低(高)调奇函数。

高(低)调偶函数定义

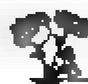
设 $D(\subseteq \mathbb{R}^n)$，$A$ 是一个常向量。

若对任意的 $X\in D$，都有 $f(A-X)\leqslant f(X)$，则称偶函数 $f(X)(X\in D)$ 关于 A 是低调的，或称 $f(X)(X\in D)$ 是 A 的低调偶函数；

若对任意的 $X\in D$，都有 $f(A-X)\geqslant f(X)$，则称偶函数 $f(X)(X\in D)$ 关于 A 是高调的，或称 $f(X)(X\in D)$ 是 A 的高调偶函数。

当等号不成立时，则称函数 $f(X)(X\in D)$ 关于 A 是严格低(高)调的，或称 $f(X)(X\in D)$ 是 A 的严格低(高)调偶函数。

低(高)调奇偶函数可作为高维空间的函数不等式的基不等式



主要参考文献

[1]李世杰，石焕南. 几何凸函数初探[J]. 北京联合大学学报(自然科学版)，2005，(3)：19-24，36

[2]Cauchy Cours d analyse de l Ecole Polyt l analyse algebrique Paris，1821

[3]匡继昌. 常用不等式(第三版)[M]. 济南：山东科学技术出版社，2004

[4]Martynyuk A. A.，Lakshmikantham V.，Leela，S. 1989 Stability of motion：the method of integral inequalities. (Russian)Kiev.

[5]中国数学会普及工作委员会编. 奥林匹克数学教程(高中提高册)[M]. 北京：开明出版社，1999.

[6]胡斌. 数学竞赛中的函数问题[M]. 北京：中国少年儿童出版社，1997

[7]王向东，戎海武，李文荣. 函数方程及应用[M]. 上海：上海科学技术文献出版社，2003.

[8]张方盛，李世杰等. 函数中容易混淆的典型个例剖析[M]. 上海：上海大学出版社，1999. 63-106

[9]李世杰. 关联 n 个三角形的一个不等式[J]. 见：中国初等数学研究文集(1980-1991). 开封：河南教育出版社，1992.

[10]李世杰. 一个奇妙的多项式函数[J]. 见：中国初等数学研究文集(1980-1991). 开封：河南教育出版社，1992

[11]李世杰. 关于凸多边形的一个不等式[J]. 见：中国初等数学研究文集(1980-1991). 开封：河南教育出版社，1992

[12]李世杰. 等差数列的乘积和[J]. 见：中国初等数学研究文集(1980-1991). 开封：河南教育出版社，1992

[13]李世杰. 二阶线性递归数列[J]. 见：中国初等数学研究文集(1980-1991). 开封：河南教育出版社，1992

[14]李世杰. 关于一类函数方程解法的探讨[J]. 数学学习，1988，(1)

[15]林群等. 无穷微积分[J]. 河北科技大学学报，2005，(4)：265-268

[16]李文荣，司建国. 单变量函数方程的理论、应用和发展[J]. 曲阜师范大学学报，1995，1



[17]李世杰.递推与递推方法[M].杭州:浙江大学出版社,2008

[18]李世杰.一个"母"函数不等式的高维推广[J].北京联合大学学报(自然科学版),2005,(1):47-50.

[19]李世杰.对函数几何凸性若干问题的理论研究[J].浙江万里学院学报,2005,(2):76-82

[20]李世杰,吴光耀.关于连续函数的T凸性问题[J].广东教育学院学报,2005,(3):7-9

[21]张景中.定积分的公理化定义方法[J].广州大学学报(自然科学版),2007,(6):1-5

[22]李世杰,吴光耀,单宝良.琴生不等式的高维推广[J].安徽电视大学学报,2005,(3):119-121,128

[23]李世杰.α凸函数[J].青岛职业技术学院学报,20 ,(2):59-62

[24]张小明,李世杰.若干凸函数不等式在几何凸函数中的移植[J].徐州师范大学学报(自然科学版),2004,(6):25-28

[25]李世杰,赵灵芝,冷岗松.Inequalities for T-Convex Functions[J].上海大学学报(英文版),2006,(2).

[26]李世杰,赵灵芝,冷岗松.Inequalities for T-Convex Functions[J].罗马尼亚 *Octogon Mathematical Magazine*,2006,(1).

[27]李世杰,侯为胜.关联n个三角形的几个新的不等式[J].延安大学学报(自然科学版),2005,(2):38-42.

[28]王扬.几个函数不等式及其应用[J].中学数学教学参考,1995,(7).

[29]李世杰.一个加权的"母"函数不等式[J].中学教研(数学),1999,(1):30-33

[30]李世杰.凸函数詹森不等式的一个推广及其应用[J].抚州师专学报(自然科学版),1988,(3):30-37.

[31]李世杰.一个重要的"母"函数不等式[J].抚州师专学报(自然科学版),1999,(1):37-40

[32]李世杰.一元二次和三次函数几何凸性的判别[J].中学数学研究,2004,(1):17-20.

[33]李世杰.广义凸函数定义和性质之我见[J].中学数学,1999,(5):45-47.

[34]李世杰.变系数一阶线性递归数列[J].厦门数学通讯,1990,(2):10-13

[35]李世杰.涉及两个三角形的又一不等式[J].数学通讯,1990,(1):22-26

[36]李世杰.一个不等式的证明、应用及推广[J].数学通讯,1989,(1):1-3.

[37]李世杰.关于递归函数的两个一般性定理[J].数学月刊,1998,(11):1-3.

[38]李世杰.关于递归函数的一个定理[J].中学教研(数学),1999,(3)

[39]程海来.函数不等式的积分证法[J].大学数学,2006,(4).

[40]李世杰.$f_n(x)$ 与 x 的同解定理及应用[J].湖南数学通讯,1991,(6)

[41]李世杰.一类函数方程解法的商榷[J].中学教研(数学),2005,(10):39-40



[42]李世杰 对函数方程迭代解法的商榷[J] 河北理科教学，2003，(3)

[43]张景中 微积分学的初等化[J] 华中师范大学学报(自然科学版)，2006，(4) 475 487

[44]李世杰 数学变换初探[J] 中学教研(数学)，2004，(1) 27 - 34

[45]李世杰 递归数列 $a_n = f(n)a_n + g(n)$ 的通项的求法[J] 数学通讯，1989，(5)

[46]李世杰 研究性学习的一个课题——Cauchy 型函数不等式 $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ 解函数的探求[J]，数学通报，2008，(5)：31 - 33

[47]李世杰 再谈高考数学原创试题的命题方向问题[J] 中学数学研究，2005，(6)，13 17 中国人民大学书报资料中心《中学数学教与学》(高中版)全文转载，2005，(10)：39 42

[48]李世杰，侯万胜，吴旦闽 对"高中数学课程标准"的框架设想的思考[J] 中学教研(数学)，2003，(3) 1 7 中国人民大学资料中心《中学数学教与学》全文转载，2003，(8)

[49]李世杰，俞武扬 High monotony Function and Its Application [J] 罗马尼亚 Octogon Mathematical Magazine，2007，(2)，

[50]李世杰，施斌 一个推广的高斯型函数方程[J] 上海师大学报(自然科学版)，2006，(2)

[51]李世杰 关于凸函数的一个不等式[J] 安徽亳州师专学报，2006，(1)

[52]李世杰，一道开放性高中数学竞赛题的多层次探究[J] 数学教学，2006，(5)

[53]张小明，李世杰 两个与初等对称函数有关的 S-几何凸函数[J] 四川师范大学学报(自然科学版)，2007，(2)：188 - 190，

[54]戴智英 一个新的函数不等式[J] 杭州师专学报，2000，(2)

[55]李世杰，正奇数次递归数列通项可求的又一种情形[J]，数学通讯，1992，(4)

[56]李勝海 一个函数不等式及其应用[J]，数学通报，1997，(12)

[57]李世杰，张小明 连续函数的 T 几何凸性[J] 浙江万里学院学报，2006，(2)

[58]李世杰，一个分数和不等式的妙用[J] 中学数学研究，1986，(5)，

[59]张小明 几何凸函数[M] 合肥安徽大学出版社，2004

[60]林群，Free Calculus A Liberation from Concepts and proofs [M]，Singapore World Scientific Press，2006





答案

能力训练1

1．D

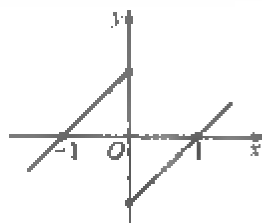
(1) 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0\Leftrightarrow\frac{2f(x)}{x}<0\Leftrightarrow xf(x)<0$.

当 $x>0$ 时，有 $f(x)<0=f(1)$，因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $0<x<1$；

当 $x<0$ 时，有 $f(x)>0=f(1)$，即 $-f(x)<-f(1)$，$f(-x)<f(1)$，因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $-x<1$ 且 $x<0$，即 $-1<x<0$.

综上可得 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，故选D.

(2) 如右图，构造满足题意的函数图象.



$\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0\Leftrightarrow\frac{2f(x)}{x}<0\Leftrightarrow xf(x)<0$.

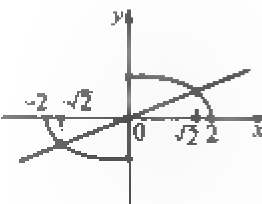
根据图象观察可得 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，故选D.

(3) 构造满足题意的函数 $f(x)=x(x-1)(x+1)(x\neq0)$.

由已知得 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\frac{2f(x)}{x}=\frac{2x(x-1)(x+1)}{x}<0$.

解得 $-1<x<0$ 或 $0<x<1$，故选D.

2．A　提示：由右图知 $f(x)$ 为奇函数，$f(-x)=-f(x)$



所以原不等式可化为 $f(x)<\frac{x}{2}$，此不等式的几何含义是 $f(x)$ 的图像在 $g(x)=\frac{x}{2}$ 图象下方的对应的 x 的取值集合．将椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与直线 $y=\frac{x}{2}$ 联立得 $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}=1$，所以 $x^2=2$，$x=\pm\sqrt{2}$.

观察图象知 $-\sqrt{2}<x<0$ 或 $\sqrt{2}<x\leqslant2$，故选A.

3．C　$-2008<2008f'(\log_2x)<2008$，所以 $-1<f'(\log_2x)<1$，所以 $1<\log_2x<3$，故 $2<x<8$，选C.

4．B　由题意可构造一个辅助函数

$f(x)=-(x-2)^2+1(0<x<3)$，

由 $f(x)$ 的奇偶性易得：当 $-3 < x < 3$ 时，

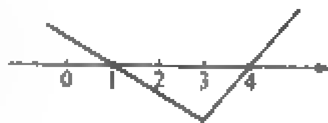
$$f(x)=\begin{cases}-(x-2)^2+1, & 0<x<3,\\ 0, & x=0,\\ (x+2)^2-1, & -3<x<0.\end{cases}$$

则问题可转化为解不等式 $f(x)\cos x < 0$。

即 $\begin{cases}f(x)<0,\\ \cos x>0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)>0,\\ \cos x<0,\end{cases}$

易解得(B)正确

5. D　由题意，$f(4)=f(-4)=0$，画出一个示意图，见右图



当 $x>0$ 时，$x^2f(x)<0$ 等价于 $f(x)<0$，解为 $(1,4)$，

当 $x<0$ 时，$x^2f(x)<0$ 等价于 $f(x)>0$，即 $f(-x)>0$，

$-x\in(0,1)\cup(4,+\infty)$，$x\in(-\infty,-4)\cup(-1,0)$，

故选 D.

6. A　原不等式等价于 $f(x+1)\geqslant 2$ 或 $f(x+1)\leqslant -2$

因为函数 $f(x)$ 图像经过点 $A(0,-2)$，$B(3,2)$，

所以　$f(x+1)\geqslant f(3)$，$f(x+1)\leqslant f(0)$

又　函数 $f(x)$ 是在 R 上的增函数，

所以　$x+1\geqslant 3$ 或 $x+1\leqslant 0$，

即　$x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -1$，故选 A.

另解　本题只指明函数 $f(x)$ 是 R 上过点 $A(0,-2)$ 和点 $B(3,2)$ 的增函数，而没有指明函数是何种曲线，我们不妨把曲线看做是过点 A、B 两点的直线，由两点式得 $f(x)=\frac{4}{3}x-2$，所以 $f(x+1)=\frac{4}{3}(x+1)-2=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$，解 $\left|\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right|\geqslant 2$ 得 $x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant -1$，故选 A.

这是解题的特殊化策略，就是根据题目所给的信息，找出一个符合题目要求的特殊函数，用这个特殊函数去求解

7. B　因为 $f(x)\cdot g(x)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，所以 $f(x)\cdot g(x)>0$ 的解集必然是对称区间，选 B.

8. A　所给不等式可化为

$$f(\cos 2\theta-5)>-f(2m+4\sin\theta).$$

因为 $f(x)$ 在 R 上是奇函数，所以

$$f(\cos 2\theta-5)>f(-2m-4\sin\theta).$$

又 $f(x)$ 在 R 上是增函数，所以

$$\cos 2\theta-5>-2m-4\sin\theta.$$

$$2m>2\sin^2\theta-4\sin\theta+4=2(\sin\theta-1)^2+2.$$

当 $\sin\theta=-1$ 时，$2(\sin\theta-1)^2+2$ 的最大值为 10，故 $2m>10$，即 $m>5$

所以当 $m>5$ 时，原不等式恒成立，选 A.

9. D　设 $F(x)=f(x)\cdot g(x)$，由题意知 $F(x)$ 是奇函数，又 $x<0$ 时，



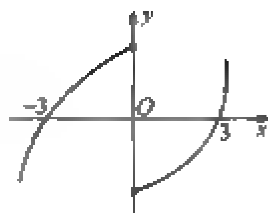
$$F'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)>0,$$

所以 $x<0$ 时，$F(x)$ 为增函数，

所以 $x>0$ 时，$F(x)$ 也为增函数

又因为 $F(-3)=f(-3)\cdot g(-3)=0$，

所以 $F(3)=-F(-3)=0$。



右图为一个符合题意的图象，观察知：$f(x)\cdot g(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(0,3)$。

10. C　因为 $x\geqslant 0$，而 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)>kx$ 的解集为 $(0,4)$，故 $f(x)\leqslant kx$ 的解集为 $\{0\}\cup[4,+\infty)$，

故 $x\in\{0\}\cup[4,+\infty)$，选 C。

11. $-1<x<0$　因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，又 $f(x)$ 在 R 上是偶函数，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是减函数，由

$$f(1)<f(x^2+x+1),$$

得 $1>x^2+x+1$，解得 $-1<x<0$。

12. $[-2,1)$　因为 $\lg[(x-3)^2+11]\geqslant\lg 11>1$，所以 $f[\lg(x^2-6x+20)]$ ……

于是，由图象可知，$\frac{2x-1}{x-1}\geqslant 1$，即 $\frac{x+2}{x-1}\leqslant 0$，解得 $-2\leqslant x<1$，故 x 的取值范围为 $x\in[-2,1)$。

13. $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$　因为 $f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，令 $x_1=x_2=1$，得 $f(1)=f(-1)=0$，再令 $x_1=x,x_2=-1$ 得 $f(x)=f(-x)$，所以函数 $f(x)$ 为偶函数。

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数。

$$f(x)+f\left(x-\frac{1}{2}\right)=f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant 0,$$

$$f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant f(1)\text{ 或 }f\left[x\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\leqslant f(-1),$$

所以 $0<x\left(x-\frac{1}{2}\right)\leqslant 1$ 或 $-1\leqslant x\left(x-\frac{1}{2}\right)<0$。

从而可得不等式的解为 $\left[\frac{1-\sqrt{17}}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right]$

14. $\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup(2,5]$　由图象可知，关于点 $(2,1)$ 对称，有 $f(x)+f(4-x)=2$，将其代入 $f(x)-f(4-x)\geqslant -2$，得 $f(x)\geqslant 0$，因而不等式的解集为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup(2,5]$

15. -1　由单调性，脱去函数记号，得

$$\begin{cases}k^2-\sin^2 x\leqslant 1,\\ k-\sin x\leqslant k^2-\sin^2 x,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k^2\leqslant 1+\sin^2 x,&①\\ k^2-k+\frac{1}{4}\geqslant\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2.&②\end{cases}$$

由题意知①②两式对一切 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，则有

$$\begin{cases}k^2\leqslant(1+\sin^2 x)_{\min}=1,\\ k^2-k+\frac{1}{4}\geqslant\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2_{\max}=\frac{9}{4},\end{cases}\Rightarrow k=-1$$



16. $\leqslant$　由条件得 $\dfrac{1}{f(\sqrt{x^2+y^2})} \geqslant \dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)}$

由于 $f(-x) = f(x)$，只需考虑 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 的情况.

令
$$x = \sqrt{u}, y = \sqrt{v}.$$
则
$$\frac{1}{f(\sqrt{u+v})} \geqslant \frac{1}{f(\sqrt{u})} + \frac{1}{f(\sqrt{v})}$$
再令
$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(\sqrt{t})}, f(\sqrt{t}) \neq 0, \\ 0, f(\sqrt{t}) = 0. \end{cases}$$
则化为
$$g(u+v) \geqslant g(u) + g(v). \quad ①$$
由式 ① 知 $g(2u) = g(u+u) \geqslant 2g(u)$，

$g(3u) = g(u+2u) \geqslant g(u) + 2g(u) = 3g(u)$

归纳得 $g(ku) \geqslant kg(u)$.

令 $k = 25, u = 1$，得 $g(25) \geqslant 25g(1)$，即 $\dfrac{1}{f(\sqrt{25})} \geqslant \dfrac{25}{f(\sqrt{1})} \Rightarrow f(5) \leqslant \dfrac{2}{25}$

17. 令 $x = 1, y = 0$，则 $f(1) = f(1) + f(0)$，

所以 $f(0) = 0$. 又 $f(1) = -1$，所以 $f(0) > f(1)$

因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有单调性，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，而 $f(0) = 0$，

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒有 $f(x) > 0$.

故 $f(k\log_2 t) + f(\log_2 t - \log_2^2 t - 2) = f[-\log_2^2 t + (k+1)\cdot\log_2 t - 2] > 0$ 恒成立

$\Leftrightarrow -\log_2^2 t + (k+1)\cdot\log_2 t - 2 < 0$ 恒成立

$\Leftrightarrow \Delta = (k+1)^2 - 8 < 0 \Leftrightarrow -1 - 2\sqrt{2} < k < -1 + 2\sqrt{2}$

所以所求 k 的取值范围是 $(-1-2\sqrt{2}, -1+2\sqrt{2})$.

注　上述解法是首先运用“特值法”及函数具有单调性，判断 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，并根据 $f(0)=0$ 断言 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上恒正．利用这一特性，将原问题转化为二次三项式恒负问题，化“生”为“熟”而获解．

18. $f(x)$ 为偶函数，有 $f(-x) = f(x) = f(|x|)$，

所以不论 $1-m$ 与 m 是正值还是负值，总有
$$f(1-m) < f(m) \Leftrightarrow f(|1-m|) < f(|m|).$$
所以有以下不等式组：
$$\begin{cases} |1-m| > |m|, \\ -2 \leqslant 1-m \leqslant 2, \Rightarrow -1 \leqslant m < \dfrac{1}{2} \\ -2 \leqslant m \leqslant 2. \end{cases}$$
这里巧用偶函数的性质，避开了讨论的麻烦．这种灵活和机巧产生在对函数性质比较深刻的了解之后．

19. 取 $s = 1, t = 0$，则 $f(1) - f(0) = 2$，结合 $f(1) = 0$ 得 $f(0) = -2$.



则 $f(x)+2=f(x)-f(0)=f(x+0)-f(0)=(x+0+1)x=(x+1)x$，

故当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时不等式 $(x+1)x<\log_a x$ 恒成立，结合图象法解得

$$\begin{cases}0<a<1,\\ \left(\frac{1}{2}+1\right)\frac{1}{2}\leqslant\log_a\frac{1}{2}.\end{cases}$$

解得实数 a 的取值范围是

$$\left\{a\,\middle|\,\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\leqslant a<1\right\}.$$

20 由 $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$，则 $f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$，$f(xy)=f(x)+f(y)$，从而原不等式转化为 $f\left[x\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]<f(1)$。

因为 $f(1)=0$，所以 $f(-1)=0$。

所以 $f(-x)=f(-1)+f(x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数

又由 $x>1$，$f(x)>0$，可证 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，因此，不等式又转化为

$$\begin{cases}x\left(x+\frac{1}{2}\right)\neq 0,\\ \left|x\left(x+\frac{1}{2}\right)\right|<1\end{cases}$$

解得 $\frac{1-\sqrt{17}}{4}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{4}$

21 (1) 取 $m>0$，则 $0<f(m)<1$，再取 $n=0$，有 $f(m-0)=f(m)\cdot f(0)$，即 $f(m)\cdot[f(0)-1]=0$，所以 $f(0)=1$。

若 $x<0$，则 $-x>0$，有 $0<f(-x)<1$，而 $f(x)\cdot f(-x)=f(x+(-x))=f(0)=1$，所以 $f(x)>1$。

(2) 在 $\mathbf{R}$ 上任取 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=f(x_1-x_2+x_2)-f(x_2)\\&=f(x_1-x_2)\cdot f(x_2)-f(x_2)\\&=f(x_2)[f(x_1-x_2)-1].\end{aligned}$$

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，所以 $f(x_1-x_2)>1$，故 $f(x_1-x_2)-1>0$，又 $f(x_2)>0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，故 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数

因为 $f(0)=1$，所以 $f(2x^2-4x-1)\cdot f(x-1)<1$，

即 $f(2x^2-4x-1)\cdot f(x-1)<f(0)$，

即 $f(2x^2-4x-1+x-1)<f(0)$，

即 $f(2x^2-3x-2)<f(0)$。

因 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $2x^2-3x-2>0$，解得 $x<-\frac{1}{2}$ 或 $x>2$。



22. (1) 证明略

(2) 证明：设 $x_2>x_1>0$，由(1)结论有 $-f(x_1)=f\left(\frac{1}{x_1}\right)$。

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f\left(\frac{1}{x_1}\right)=f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$

因为 $\frac{x_2}{x_1}>1$，由题设条件 ② 可得 $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)>0$.

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上为增函数

(3) 解 原不等式与 $f(x)+f(2a-x)\geqslant 2$ 同解

因为 $2=1+1=f(3)+f(3)=f(9)$，

所以 $f[x(2a-x)]\geqslant f(9)$ 从而据(2)中 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 是增函数的结论可得

$$\begin{cases}a>0,\\x>0,\\2a-x>0,\\x(2a-x)\geqslant 9.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0,\\0<x<2a,\\x^2-2ax+9\leqslant 0.\end{cases}$$

① 当 $\Delta_1=4a^2-36<0$，即 $0<a<3$ 时，上述不等式组无解

② 当 $\Delta=4a^2-36=0$，即 $a=3$ 时，可得 $f(x)+f(2a-x)=f(9)$，即 $f[x(6-x)]=f(9)$，从而得 $x(6-x)=9$，故 $x=3$.

③ 当 $\Delta=4a^2-36>0$，即 $a>3$ 时，由 $x^2-2ax+9\leqslant 0$，解得 $a-\sqrt{a^2-9}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{a^2-9}$

(因为 $a>0$，$a-\sqrt{a^2-9}>0$，$a+\sqrt{a^2-9}<2a$)

综上所述：当 $a<3$ 时，不等式无解；

当 $a=3$ 时，不等式的解为 $x=3$；

当 $a>3$ 时，不等式的解为：

$$a-\sqrt{a^2-9}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{a^2-9}.$$

23. (1) 令 $x=0$，$y=-1$，则 $f(0-1)=f(0)\cdot f(-1)$(因为 $f(-1)\neq 0$)$\Rightarrow f(0)=1$

当 $x<0$ 时，$f(x)>1>0$，

当 $x>0$ 时，$-x<0$，有 $f(-x)>1>0$，由 $f(0)=f(-x)\cdot f(x)$，$0<f(x)=\frac{1}{f(-x)}<1$，故对任意 $x>0$，恒有 $0<f(x)<1$

(2) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

证明：设 x_1、$x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=f[x_1+(x_2-x_1)]-f(x_1)\\&=f(x_2-x_1)\cdot f(x_1)-f(x_1)\\&=[f(x_2-x_1)-1]f(x_1)<0.\end{aligned}$$

因为 $x_2-x_1>0$，所以 $f(x_2-x_1)<1$，所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$.

故，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数

(3) $f(x^2)\cdot f(y^2)=f(x^2+y^2)\leqslant f(axy)$，可转化为 $x^2+y^2\geqslant axy$ 对任意实数 x、y 恒成立，即 $x^2+y^2\geqslant|axy|=|a||x||y|$ 对任意实数 x、y 恒成立，即 $|a|\leqslant\left|\frac{x}{y}\right|+\left|\frac{y}{x}\right|$ 对任意实数 x、y 恒成



立，所以 $|a|\leqslant 2$，即 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 为所求.

24 (1) 由题设得 $f(2-x)=f(2+x)=f(2k-2+x)(k\in \mathbf{Z})$

所以函数 $f(x)$ 图象的对称轴为

$$x=\frac{(2-x)+(2k-2+x)}{2}=k(k\in \mathbf{Z})$$

又 $[a,b]$ 为函数 $f(x)$ 的一个单调区间.

故 $b-a\leqslant 1$.

(2) 因为当 $x<0$ 时，都有 $f(2^x)>f(2)$，且 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，所以 $f(2^x)>f(0)(x<0)$.

因为 $x<0$，故 $0<2^x<1$.

所以对 $0<x<1$，有 $f(x)>f(0)$.

又 $[0,1]$ 为 $f(x)$ 的一个单调区间，所以 $[0,1]$ 必为 $f(x)$ 的单调递增区间，从而 $[1,2]$ 为 $f(x)$ 的单调递减区间.

于是，整个定义域被分为两类区间 $[2k,2k+1]$ 为递增区间，$[2k+1,2k+2]$ 为递减区间 $(k\in \mathbf{Z})$.

因为 $-10.5\in[2k+1,2k+2]$，且 $f(-10.5)>f(x^2+6x)$，

所以 $f(-9.5)>f(x^2+6x)$.

先考虑不等式在一个周期区间 $[-11,-9]$ 的解，有 $-10.5<x^2+6x<-9.5$，

再进行一般化，有

$$2k-10.5<x^2+6x<2k-9.5,$$

即 $2k-1.5<(x+3)^2<2k-0.5$. ①

由 $2k-0.5>0$，得 $k>0.25$，则 $k\geqslant 1(k\in \mathbf{Z})$.

解式①得 $-3-\frac{\sqrt{8k-2}}{2}<x<-3-\frac{\sqrt{8k-6}}{2}$ 或 $-3+\frac{\sqrt{8k-6}}{2}<x<-3+\frac{\sqrt{8k-2}}{2}(k\in \mathbf{N}^*)$.

25 由条件①，令 $m=n=0$，得 $f(0)=0$；再令 $n=-x$，$m=x$，得 $f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

设 $x_1,x_2\in \mathbf{R}$，且 $x_2>x_1$，则由①、③得

$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)>0$（因为 $x_2-x_1>0$），所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

由② $f(1)=2$ 及③可得 $24=12f(1)=f(12)$，所以

$f(3x^2)+f(4y^2)\leqslant 24$ 即 $f(3x^2+4y^2)\leqslant f(12)$，

从而 $A=\{(x,y)\mid 3x^2+4y^2\leqslant 12\}$.

同理，由 $f(x)-f(ay)+f(3)=0$，得 $f(x-ay+3)=f(0)$，从而 $B=\{(x,y)\mid x-ay+3=0\}$.

由 $f(x)=\frac{1}{2}f(y^2)+f(a)$，得 $f(2x-2a)=f(y^2)$，从而 $C=\{(x,y)\mid y^2=2(x-a)\}$.

由 $A\cap B\neq\varnothing$，知直线 $x-ay+3=0$ 与椭圆 $3x^2+4y^2=12$ 相交或相切.

作变换 $x=2x'$，$y=\sqrt{3}y'$，可将问题转化为直线：$2x'-\sqrt{3}ay'+3=0$ 与圆：$x'^2+y'^2=1$ 有交点的问题，等价于 $\frac{3}{\sqrt{4+3a^2}}\leqslant 1$，$a^2\geqslant\frac{5}{3}$，解得 $a\leqslant-\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $a\geqslant\frac{\sqrt{15}}{3}$.



由 $A\cap C\neq\varnothing$ 等价于方程组

$$\begin{cases}3x^2+4y^2=12,\\ y^2=2(x-a)\end{cases}$$

有解，相当于方程

$$3x^2+8(x-a)-12=0$$

有 $\geqslant a$ 的根，根据一元二次方程根的分布规律，得

$$f(a)<0,$$

$$f(a)\leqslant 0 \text{ 或 } \begin{cases}-\dfrac{4}{3}\geqslant a,\\ \Delta=64+12(8a+12)\geqslant 0.\end{cases}$$

解得 $-\dfrac{13}{6}\leqslant a\leqslant 2$

所以实数 a 的取值范围是 $\left[-\dfrac{13}{6},-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{15}}{3},2\right]$

能力训练 2

1. B ②、④符合条件。 2. B

3. D 任意的

$|f_1(x_1)-f_1(x_2)|=|x_1^2-x_2^2-2(x_1-x_2)|=|x_1-x_2||x_1+x_2-2|\leqslant 4|x_1-x_2|$，

$|f_2(x_1)-f_2(x_2)|=|\sqrt{|x_1|}-\sqrt{|x_2|}|=\dfrac{||x_1|-|x_2||}{\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|}}$，

取 $x_1=\dfrac{1}{900}$，$x_2=\dfrac{1}{3600}$，则

$$|f_2(x_1)-f_2(x_2)|=\frac{||x_1|-|x_2||}{\sqrt{|x_1|}+\sqrt{|x_2|}}=\frac{|x_1-x_2|}{\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{60}}=20|x_1-x_2|>4|x_1-x_2|$$

4. B 将 $f(x)=x+1$ 代入所给函数不等式，得

$$x+y+1\leqslant 2(x+1)-3(y+1),$$

即 $x-4y-2\geqslant 0$。

解方程组 $\begin{cases}y=x+1,\\ x-4y-2=0,\end{cases}$ 得 $x=-2$。

所以 $a\leqslant -2$，故选 B。

5. D 由题设，函数的值域中的元素在 f 的作用下仍为它本身。

根据函数值域的不同情况进行分类讨论：

(1) 函数 $f(x)$ 的值域为单元素集，则有

$$f_1:\begin{bmatrix}1\to 1\\2\to 1\\3\to 1\end{bmatrix},\ f_2:\begin{bmatrix}1\to 2\\2\to 2\\3\to 2\end{bmatrix},\ f_3:\begin{bmatrix}1\to 3\\2\to 3\\3\to 3\end{bmatrix};$$

(2) 函数 $f(x)$ 的值域为两个元素集，则有



$$f:\begin{cases}1\to1\\2\to2\\3\to1\end{cases},\quad f:\begin{cases}1\to1\\2\to2\\3\to2\end{cases},\quad f:\begin{cases}1\to1\\2\to1\\3\to3\end{cases},$$

$$f:\begin{cases}1\to1\\2\to3\\3\to3\end{cases},\quad f:\begin{cases}1\to2\\2\to2\\3\to3\end{cases},\quad f:\begin{cases}1\to3\\2\to2\\3\to3\end{cases};$$

(3) 函数 $f(x)$ 的值域为 3 个元素集，则有

$$f:\begin{cases}1\to1\\2\to2\\3\to3\end{cases}$$

故满足条件的函数共有 10 个.

说明 根据以上方法，对函数的值域中的元素个数进行分类讨论，很容易地推广到 n 个元素的情况.

推广 函数 $f:\{1,2,3,\cdots,n\}\to\{1,2,3,\cdots,n\}$ 满足 $f(f(x))\geqslant f(x)$，则这样的函数个数共有______个.

分析 把集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 分成它的值域及其补集，其中值域中的元素在函数 f 的作用下为它本身，其补集中的元素的象可以是值域中的任一元素. 例如 $n=3$ 时，若 f 对应的值域为 $\{1,2\}$，其补集为 $\{3\}$，则有 $f:\begin{cases}1\to1\\2\to2\\3\to1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1\to1\\2\to2\\3\to2\end{cases}$

所以，当值域为一个元素的函数有 C_n^1 个；当值域为两个元素的函数有 $2^{n-2}C_n^2$ 个；当值域为 k 个元素的函数有 $k^{n-k}C_n^k$ 个；当值域为 n 个元素的函数有 1 个，即 $n^0C_n^n$ 个.

综上知，满足题意的函数的个数为

$$C_n^1+2^{n-2}C_n^2+\cdots+k^{n-k}C_n^k+\cdots+C_n^n=\sum_{k=1}^{n}k^{n-k}C_n^k$$

6. 这是答案开放题，符合条件的函数很多. 如 $f(x)=4-5\left(\frac{1}{2}\right)^x(x>0)$；$f(x)=\frac{10}{\pi}\arctan x-1(x>0)$；$f(x)=5^{1-\frac{1}{x}}-1(x>0)$；$f(x)=5^{1-\frac{2}{x}}-1(x>0)$ 等.

7. 这样的函数不存在. 否则，$f(0)-f^2(0)\geqslant\frac{1}{4}$ 即 $\left[f(0)-\frac{1}{2}\right]^2\leqslant0$，则 $f(0)=\frac{1}{2}$，同理 $f(1)=\frac{1}{2}$，而 $f(0)=f(1)$，矛盾.

8. 任取 $x_0\in\mathbf{R}$，记 $b=\frac{f(x_0)}{f(0)}$，只要证明 $b\leqslant1$. 因为这时对任意 x 有 $0<f(x)\leqslant f(0)$，及 $0<f(-x)\leqslant f(0)$，可推出 $f(x)f(-x)\leqslant f^2(0)$. 由条件②，$f(x)f(-x)\geqslant f^2(0)$，所以，$f(x)=f(-x)=f(0)$，$x\in\mathbf{R}$.

为证明 $b\leqslant1$，只要用数学归纳法先证明：$f(nx_0)\geqslant f(0)\cdot b^n$（讨论 $n=2^k$ 即可）. 于是，如果 $b>1$，可取足够大的 n_0，使 $b^{n_0}>\frac{a}{f(0)}$，便可推出 $f(n_0x_0)\geqslant f(0)\cdot b^{n_0}>a$，与条件①矛盾.



9. 因为 $f^2(0)\leqslant 0$,所以 $f(0)=0$,即 $0\notin A$

设 $a\in A$,则 $f(a)>a^2$,而由已知条件,

$$f^2(a)\leqslant 2a^2 f\left(\frac{a}{2}\right),$$

所以 $f\left(\frac{a}{2}\right)\geqslant\frac{f^2(a)}{2a^2}>\frac{(a^2)^2}{2a^2}=\frac{a^2}{2}>\left(\frac{a}{2}\right)^2$,即 $\frac{a}{2}\in A$.

于是 $a,\frac{a}{2},\frac{a}{2^2},\frac{a}{2^3},\cdots$ 均 $\in A$,所以 A 为无限集

10. 令 $x=y$,得 $f^2(x)+g^2(x)\leqslant g(0)$, ①

在式 ① 中再令 $x=0$,得 $f^2(0)+g^2(0)\leqslant g(0)$

所以 $g^2(0)\leqslant g(0)$,有 $0\leqslant g(0)\leqslant 1$.

结合式 ① 得 $f^2(x)+g^2(x)\leqslant 1$,所以 $f^2(x)\leqslant 1$,$g^2(x)\leqslant 1$,故 $|f(x)|\leqslant 1$,$|g(x)|\leqslant 1$,于是

$$f^{2008}(x)\leqslant f^2(x),g^{2008}(x)\leqslant g^2(x),$$

故 $f^{2008}(x)+g^{2008}(x)\leqslant f^2(x)+g^2(x)\leqslant 1$.

11. 显然,由 $f(1)f[f(1)]\leqslant 1$,得 $f(1)=1$

假设当 $x=1,2,\cdots,k$(k 为某个正整数)时,都有 $f(x)=x$,下面来证:$f(x+1)=x+1$

由归纳假设及 $f(x)$ 是递增函数,知:

若 $x\geqslant k+1$,则 $f(x)\geqslant k+1$. ①

若 $f(k+1)>k+1$,由题给不等式得

$$f[f(k+1)]\leqslant\frac{(k+1)^2}{f(k+1)}<\frac{(k+1)^2}{k+1}=k+1$$

再利用式 ① 得 $f(k+1)\leqslant k$,但这又与式 ① 矛盾

故必有 $f(k+1)=k+1$

由归纳原理,知 $f(x)=x$,$\forall x\in\mathbf{N}^*$.

12. $f(x+y)-f(x)\geqslant f(x)[f(y)-1]$,即

$$f(x+y)-f(x)\geqslant f(x)[f(y)-f(0)], \quad ①$$

① 式两边同除 y,

当 $y>0$ 时,得

$$\frac{1}{(x+y)-x}[f(x+y)-f(x)]\geqslant f(x)\frac{f(y)-f(0)}{y-0}$$

令 $y\to 0$,得 $f'(x)\geqslant f(x)\cdot f'(0)$ ②

当 $y<0$ 时,得

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{(x+y)-x}\leqslant f(x)\cdot\frac{f(y)-f(0)}{y-0},$$

令 $y\to 0$,得 $f'(x)\leqslant f(x)\cdot f'(0)$ ③

由式 ②、③ 得 $f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$,于是

$$[e^{-f'(0)x}f(x)]'=e^{-f'(0)x}[f'(x)-f'(0)f(x)]=0,$$

故 $f(x)=ce^{f'(0)x}$,代回原不等式检验,并注意到 $f(0)=1$,得 $c=1$.令 $a=e^{f'(0)}$,得 $f(x)=a^x(a>0)$

13. 因为 $f(x+3)=f[(x+1)+2]=2-f(x+1)$



所以 $2-f(x+1)\geqslant f(x)$，即

$$f(x+1)+f(x)\leqslant 2. \quad ①$$

又 $f(x)=2-f(x+2)$，代入 $f(x+3)\geqslant f(x)$ 右边得

$$f(x+3)\geqslant 2-f(x+2),$$

即 $f(x+3)+f(x+2)\geqslant 2$

用 $x-2$ 替换 x，得

$$f(x+1)+f(x)\geqslant 2. \quad ②$$

由式①②，得 $f(x+1)+f(x)=2$，结合 $f(x+2)=2-f(x)$，得 $f(x+2)=f(x+1)$，以 $x-1$ 替换 x，得 $f(x+1)=f(x)$，所以 $f(x+2)=f(x)=2-f(x)$，解 $f(x)=1$.

14. 设 $F(x,y)=ax+b+ay+b-xy$，由已知得

$$\frac{1}{4}\geqslant |F(0,0)|=2b\geqslant-\frac{1}{4}，即 \frac{1}{8}\geqslant b\geqslant-\frac{1}{8}. \quad ①$$

$$|F(0,1)|=|a+2b|\leqslant\frac{1}{4}. \quad ②$$

$$\frac{1}{4}\geqslant F(1,1)=2a+2b-1\geqslant-\frac{1}{4}，即 \frac{9}{8}\geqslant a+b\geqslant\frac{3}{8}. \quad ③$$

由②－③得 $a+2b-(a+b)\leqslant\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{8}$，即 $b\leqslant-\frac{1}{8}$，结合①立得 $b=-\frac{1}{8}$.

此时以 $b=-\frac{1}{8}$ 代入②、③分别得 $a\leqslant\frac{1}{2}$，$a\geqslant\frac{1}{2}$，因此得 $a=\frac{1}{2}$.

因此所求的一次函数只能是 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$.

另外当 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$ 时，$|F(x,y)|=\left|\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{4}-xy\right|=\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|\frac{1}{2}-y\right|\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 对任意的 $x,y\in[0,1]$ 都成立.

故所求的一次函数是 $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$.

15. $f(x)>x$，$x\in\mathbf{R}^+$.

首先证明：对于所有的 $y\in\mathbf{R}^+$，有 $f(y)>y$.

实际上，由条件可得 $f[x+f(y)]>f(x+y)$.

因此，$f(y)\neq y$.

若存在正实数 y 使得 $f(y)<y$，设 $x=y-f(y)$，则 $y=x+f(y)$，

$$f(y)=f[x+f(y)]\geqslant f(x+y)+f(y)>f(y),$$

矛盾.

所以，对于所有的 $y\in\mathbf{R}^+$，有 $f(y)>y$.

16. 在题给不等式①中交换 x 与 y 的位置，有

$$f(y)f(x)\geqslant\frac{x^a}{y^a+y^b}[f(y)]^2+\frac{y^b}{x^a+x^b}[f(x)]^2. \quad ②$$

由①＋②，得



$$2f(x)f(y) \geqslant \frac{x^\alpha + x^\beta}{y^\alpha + y^\beta}[f(y)]^2 + \frac{y^\alpha + y^\beta}{x^\alpha + x^\beta}[f(x)]^2$$

上式两端乘以$\frac{1}{(x^\alpha + x^\beta)(y^\alpha + y^\beta)}$，有

$$\left[\frac{f(x)}{x^\alpha + x^\beta} - \frac{f(y)}{y^\alpha + y^\beta}\right] \leqslant 0,$$

那么，必有

$$\frac{f(x)}{x^\alpha + x^\beta} = \frac{f(y)}{y^\alpha + y^\beta}$$

在上式中，令 $y = 1$，且记 $\lambda = \frac{f(1)}{2}$，有

$$f(x) = \lambda(x^\alpha + x^\beta). \quad ③$$

当 $\lambda = 0$ 时，$f(x) = 0$，它显然是函数不等式 ① 的一个解

当 $\lambda \neq 0$ 时，将 ③ 代入 ① 两边，得

$$\begin{aligned}&\lambda^2(x^\alpha + x^\beta)(y^\alpha + y^\beta)\\&\quad \geqslant \lambda^2 y^\alpha(x^\alpha + x^\beta) + \lambda^2 x^\beta(y^\alpha + y^\beta)\\&\quad \Leftrightarrow x^\alpha y^\beta \geqslant y^\alpha x^\beta\end{aligned}$$

由 x、y 的任意性，后一不等式显然不成立

所以题给函数不等式的解为 $f(x) = 0$.

17. 由于 $f(x)$ 为二次函数，可用待定系数法设为

$$f(x) = ax^2 + bx + 12(a \neq 0), \quad ③$$

又由 ① 代入 ② 有

$$2^{x+1}f(x+1) - 2^x f(x) \geqslant 2^{x+1}x^2,$$

即

$$2f(x+1) - f(x) \geqslant 2x^2. \quad ④$$

将 ③ 代入 ④，得

$$ax^2 + (4a+b)x + (2a+2b+12) \geqslant 2x^2. \quad ⑤$$

有(1) $a = 2, b = -8$.

于是 $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$,

$g(x) = (2x^2 - 8x + 12)2^x$.

检验知为所求

或(2) $a \neq 2$ 时，$\begin{cases} a > 2 \\ \Delta = (4a+b)^2 - 4(a-2)(2a+2b+12) \leqslant 0. \end{cases}$

即

$$8(a+1)^2 + (b-16)^2 \leqslant 168(a > 2)$$

$$2 < a \leqslant \sqrt{21 - \frac{1}{8}(b-16)^2} - 1$$

综上，$f(x) = 2x^2 - 8x + 12$，$g(x) = (2x^2 - 8x + 12)2^x$ 或 $f(x) = ax^2 + bx + 12$，$g(x) = (ax^2 + bx + 12)2^x$，其中 a、b 满足 $2 < a \leqslant \sqrt{21 - \frac{1}{8}(b-16)^2} - 1$.

说明 如果能预知函数的结构，那就可用待定系数先表示出来，问题归结为系数的确定 通常是解



方程组求出待定系数的具体数值

18. 首先 $f(0)=0$,令 $g(x)=f(x)/x(x\neq 0)$，$g(0)=0$,由于 $|f(x)|\leqslant 1$,因此 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$. 易得 $g(x+y)=g(x)+g(y)$,如果存在某点 $x\neq 0$ 使得 $g(x)=t\neq 0$,那么 $g(kx)=kt$(k 是整数)，$\lim\limits_{k\to\infty} g(kx)=kt\to\infty$,矛盾.

所以 $g(x)\equiv 0$,因此 $f(x)\equiv 0$.

19. 令 $x=y=-z$,得到 $f(2x)+f(0)+f(0)\geqslant 3f(0)$,

从而 $f(2x)\geqslant f(0)$. 另一方面,令 $x=z=-y$,得到 $f(0)+f(0)+f(2x)\geqslant 3f(2x)$,从而知 $f(2x)\leqslant f(0)$. 于是,$f(0)\geqslant f(2x)\geqslant f(0)$,即 $f(2x)\equiv$ 常数 $=c$.

容易验证,对任何 $c\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)\equiv c$ 满足条件.

20. (1) 因为对任意 $x\in\mathbf{R}^+$,$f^2(x)\cdot f\left[f(x)-\dfrac{1}{x^2}\right]=f^2(1)$,令 $x=1$,得 $f^2(1)\cdot f[f(1)-1]=f^2(1)$,由条件 $f(x)>\dfrac{1}{x^2}$,$x\in\mathbf{R}^+$,得 $f(1)>1\neq 0$,故 $f[f(1)-1]=f(1)$,由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上单调递减,得 $f(1)-1=1$,即 $f(1)=2$.

(2) 因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的减函数,且 $f(x)>\dfrac{1}{x^2}$,所以猜想 $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ 满足条件.

验证①:对任意 $0<x_1<x_2$,有

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{x_1^2\cdot x_2^2}>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是减函数,$f(x)>\dfrac{1}{x^2}$ 显然成立.

验证②:当 $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ 时,

$$f^2(x)\cdot f\left[f(x)-\frac{1}{x^2}\right]=f^2(x)\cdot f\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{4}{x^4}\cdot 2x^4=8;$$

而 $f^2(1)=8$,

所以 $f^2(x)\cdot f\left[f(x)-\dfrac{1}{x^2}\right]=f^2(1)$.

综上可知函数 $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ 满足条件.

21. 题设所给的是一个不等式,而不是方程,而且变元有三个,即 x,y,z,我们设法通过取一些特殊值来寻求结果.

令 $x=y=z=1$,代入①,得

$$f(1)-[f(1)]^2\geqslant\frac{1}{4}.$$

所以

$$\left[f(1)-\frac{1}{2}\right]^2\leqslant 0.$$

故

$$f(1)=\frac{1}{2}. \qquad ②$$

令 $y=z=1$,代入①并利用②,得



$$f(x) - \frac{1}{2} f(x) \geqslant \frac{1}{4}$$

所以 $$f(x) \geqslant \frac{1}{2}. \quad ③$$

令 $x = y = z = 0$，代入 ①，得

$$f(0) - f^2(0) \geqslant \frac{1}{4}$$

所以 $$f(0) = \frac{1}{2}. \quad ④$$

令 $x = 0$，代入 ① 并利用 ④，得

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} f(yz) \geqslant \frac{1}{4},$$

故 $$f(yz) \leqslant \frac{1}{2},$$

即 $$f(x) \leqslant \frac{1}{2} \quad ⑤$$

综合 ③ 和 ⑤，即得 $f(x) = \frac{1}{2}$

22. 所给的条件是一个不等式，要求的表达式是一个等式，因此要设法从不等式中导出等式

先减少不等式中变元的数目，为此令 $u = 1, v = \frac{y}{x}$，代入题给不等式，得

$$f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(f(x) + \frac{y}{x} f(y)\right),$$

所以 $xf(x) \leqslant yf(y)$.

同样可得

$$yf(y) \leqslant xf(x)$$

所以 $xf(x) = yf(y)$.

由于上式对任意 $x, y \in \mathbf{R}^+$ 都成立，因此

$$xf(x) = c（常数），$$

$$f(x) = \frac{c}{x}.$$

其中 c 是正常数．下面验证 $f(x) = \frac{c}{x}$ 满足题设不等式

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x}{2u} + \frac{y}{2v}\right) &= \frac{c}{\frac{x}{2u} + \frac{y}{2v}} = c \cdot \frac{2}{\left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v}\right)} \\ &\leqslant c \cdot \frac{\frac{u}{x} + \frac{v}{y}}{2} \\ &= \frac{1}{2} u \cdot \frac{c}{x} + \frac{1}{2} v \cdot \frac{c}{y} \\ &= \frac{1}{2} uf(x) + \frac{1}{2} vf(y) \end{aligned}$$



23. 由条件可知，对一切 $n\in\mathbf{N}$，有

$$1\leqslant 3f(n)[f(2n+1)-f(2n)]=f(2n)<6f(n), \quad ①$$

因此 $1\leqslant f(2n+1)-f(2n)<2$，$f(2n+1)=f(2n)+1$， ②

将②代入①得到 $f(2n)=3f(n)$， ③

利用②和③，通过数学归纳法可以证明 $f(2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s})=3^{n_1}+3^{n_2}+\cdots+3^{n_s}$，这里的非负整数 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 适合 $0\leqslant n_1<n_2<\cdots<n_s$。

记 $k=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_s}$，$l=2^{m_1}+2^{m_2}+\cdots+2^{m_t}$，其中 $n_1<n_2<\cdots<n_s$，$m_1<m_2<\cdots<m_t$。

当 $k<l$ 时，显然有 $f(k)<f(l)$，注意到 $293=3^5+3^3+2\times3^2+3+2\times3^0$，而其中的 $3^5=243$ 必然是 $f(l)$ 的一个加项，3^2 和 3^0 必然是 $f(k)$ 和 $f(l)$ 中每一个的加项，只有 3^3 和 3 不确定。因此，$f(k)$ 和 $f(l)$ 只有以下 4 种情况

$$\begin{cases}f(k)=3^2+3^0,\\ f(l)=3^5+3^3+3^2+3+3^0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(k)=3^3+3^2+3^0,\\ f(l)=3^5+3^2+3+3^0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(k)=3^2+3+3^0,\\ f(l)=3^5+3^3+3^2+3^0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}f(k)=3^3+3^2+3+3^0,\\ f(l)=3^5+3^2+3^0.\end{cases}$$

相应地，我们得到所给方程的全部解：

$$\begin{cases}k=2^2+2^0=5,\\ l=2^5+2^3+2^2+2+1=47;\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=2^3+2^2+2^0=13,\\ l=2^5+2^2+2+2^0=39;\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=2^2+2+2^0=7,\\ l=2^5+2^3+2^2+2^0=45;\end{cases}$$

$$\begin{cases}k=2^3+2^2+2+2^0=15,\\ l=2^5+2^2+2^0=37\end{cases}$$

24. 记 $f^k(n)=f^{k-1}[f(n)](k=2,3,\cdots)$

假设存在 a，满足 $a>f(a)$

我们有 $f[f(a)]<a$，利用归纳法可知

$$f^k(a)<a(k\in\mathbf{N}^+), \quad ①$$

取数 $f(a),\cdots,f^a(a)$，可知它们都属于 $\{1,2,\cdots,a-1\}$，由抽屉原理知必定存在 $i,j\in\mathbf{N}^+$，$i<j$，满足 $f^i(a)=f^j(a)$，

由于 f 为一一映射，可知 $f^{j-i}(a)=a$，矛盾

所以 $a\leqslant f(a)\quad(a\in\mathbf{N}^+)$，用 $f(a)$ 代替 a 可知 $f(a)\leqslant f[f(a)]$

另一方面，$f[f(a)]\leqslant\dfrac{a+f(a)}{2}\leqslant f(a)$，



所以 $f[f(a)] = f(a)$，所以 $f(a) = a$。

经检验 $f(x) = x$ 为所求解

25 设 $r, s, n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geqslant 1, s \geqslant r \geqslant 2, m \in \mathbf{N}^*$ 满足 $r^m \leqslant s^n \leqslant r^{m+1}$（由指数函数的定义可知，必定存在这样的 m）对不等式取对数得

$$m\ln r \leqslant n\ln s \leqslant (m+1)\ln r,$$

即
$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{\ln s}{\ln r} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad ①$$

因为 f 单调不减，所以
$$f(r^m) \leqslant f(s^n) \leqslant f(r^{m+1}).$$

由条件得
$$f(r^m) = mf(r)$$
$$f(s^n) = nf(s).$$

因而有
$$mf(r) \leqslant nf(s) \leqslant (m+1)f(r)$$

即
$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{f(s)}{f(r)} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad ②$$

综合①②得
$$\left|\frac{f(s)}{f(r)} - \frac{\ln s}{\ln r}\right| \leqslant \frac{1}{n}. \qquad ③$$

由于 $s, r, n \in \mathbf{N}^*$，对于任意给定的正整数 $s \geqslant r \geqslant 2$，由③中 n 的任意性，有
$$\frac{f(s)}{f(r)} = \frac{\ln s}{\ln r},$$

即
$$\frac{f(s)}{\ln s} = \frac{f(r)}{\ln r}.$$

特别地，取 $r = 2$ 有
$$f(s) = \frac{f(2)}{\ln 2}\ln s.$$

再由 s 的任意性即可知对任意正整数 $n \geqslant 2$，都有
$$f(n) = \beta\ln n.$$

其中 $\beta = \frac{f(2)}{\ln 2}$.

由条件 $f(1) = 0$，而且 $f(2) \geqslant f(1) \geqslant 0$ 可知 $\beta \geqslant 0$.

说明 ①在实数集中讨论解时，方程通常是通过指数变换来解的，但此法在正整数集上行不通，其原因是：e^x 不是正整数

② 令 $f(n) = \ln g(n)$，由结论可得

设 g 在自然数集 $\mathbf{N}$ 上定义，对任何 $m, n \in \mathbf{N}^*$，都有
$$g(mn) = g(m)g(n),$$
且 $g(n+1) \geqslant g(n)$，则 $g(n) = n^\beta$，其中 $\beta = \frac{\ln g(2)}{\ln 2} = \log_2 g(2)$

能力训练 3

1. 令 $y = \sin x - 1$，则 $-2 \leqslant y \leqslant 0$，$\sin x = 1 + y$，所以 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - (y+1)^2$，从而 $f(y) \geqslant -(y+1)^2 + 2 = -y^2 - 2y + 2$，故所给函数不等式的解为
$$f(x) \geqslant -x^2 - 2x + 2, (-2 \leqslant x \leqslant 0)$$



经检验，$f(x)\geqslant -x^2-2x+2(-2\leqslant x\leqslant 0)$ 是函数不等式的解.

2. 令 $t=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $x=\dfrac{1-t}{1+t}$，代入所给函数不等式，得 $f(t)\geqslant \dfrac{1-t}{1+t}(t\neq -1)$，所以 $f(x)\geqslant \dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$.

3. 用待定函数法. 设 $f(x)=ax+b, a, b\in \mathbf{R}$，则

$$f[f(x)]=af(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+(a+1)b\geqslant x-3$$

对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，必须 $a^2=1, (a+1)b\geqslant -3$，即 $a=-1, b\in\mathbf{R}$；$a=1, b\geqslant -\dfrac{3}{2}$，所以题给函数不等式的解为 $f(x)=-x+b, b\in\mathbf{R}$ 或 $f(x)=x+b, b\geqslant -\dfrac{3}{2}$.

4. 用待定函数法. 设 $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbf{R}$，则

$$f[f(x)]=f^{\alpha}(x)=(x^{\alpha})^{\alpha}=x^{\alpha^2}\geqslant x^2, \alpha^2\geqslant 2.$$

所以题给函数不等式的幂函数解为 $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

5. 设 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$，记 $f(f[\underbrace{f\cdots f(x)}_{n个}])=f^{(n)}(x)$，则

$$f^{(2)}(x)=f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+b(a+1),$$

$$f^{(3)}(x)=f\{f[f(x)]\}=a[a^2x+b(a+1)]+b=a^3x+b(a^2+a+1),$$

依此类推有，$f^{(10)}(x)=a^{10}x+b(a^9+a^8+\cdots+a+1)=a^{10}x+\dfrac{b(1-a^{10})}{1-a}$.

由题设知，$a^{10}x+\dfrac{b(1-a^{10})}{1-a}\geqslant 1024x-1023$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 都成立. 则

$a^{10}=1024$ 且 $\dfrac{b(1-a^{10})}{1-a}\geqslant -1023$.

所以 $a=2, b\geqslant 1$ 或 $a=-2, b\leqslant -3$.

所以 $f(x)=2x+b(b\geqslant 1)$ 或 $f(x)=-2x+b(b\leqslant -3)$.

6. 引入参函数 $p(x)(\forall p(x)\geqslant 0, x\in\mathbf{R}^{+})$，令

$$af(x)+bx^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\sin x+p(x). \qquad ①$$

上述不等式中 x 用 $\dfrac{1}{x}$ 代换，得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+b\left(\frac{1}{x}\right)^2f(x)=\sin\frac{1}{x}+p\left(\frac{1}{x}\right). \qquad ②$$

由①，②组成方程组，消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，得

$f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left[a\sin x-bx^2\sin\dfrac{1}{x}+ap(x)-bx^2p\left(\dfrac{1}{x}\right)\right], \forall p(x)\geqslant 0, x\in\mathbf{R}^{+}$

7. $$|f'(x)|=\left|\lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|=\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|$$

$$=\lim_{y\to x}\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}=\lim_{y\to x}\frac{(y-x)^2}{|y-x|}$$



$$=\lim_{y\to x}|y-x|=0.$$

所以 $f'(x)=0$，$f(x)$ 为常数.

8. 设 $\varphi(x)=\frac{x-1}{x+1}$，$\varphi^{(2)}(x)=-\frac{1}{x}$，$\varphi^{(3)}(x)=\frac{1+x}{1-x}$，$\varphi^{(4)}(x)=x$

所给函数不等式可改写为

$$f[\varphi(x)]+f[\varphi^{(2)}(x)]+f[\varphi^{(3)}(x)]\geqslant \sin x$$

令

$$f[\varphi(x)]+f[\varphi^{(2)}(x)]+f[\varphi^{(3)}(x)]=p(x),\qquad ①$$

这里 $\forall p(x)\geqslant \sin x$.

把此式中的 x 依次换成 $\varphi(x)$，$\varphi^{(2)}(x)$，$\varphi^{(3)}(x)$，得

$$f[\varphi^{(2)}(x)]+f[\varphi^{(3)}(x)]+f(x)=p[\varphi(x)],\qquad ②$$

$$f[\varphi^{(3)}(x)]+f(x)+f[\varphi(x)]=p[\varphi^{(2)}(x)],\qquad ③$$

$$f(x)+f[\varphi(x)]+f[\varphi^{(2)}(x)]=p[\varphi^{(3)}(x)],\qquad ④$$

②＋③＋④－2×①，得

$$f(x)=\frac{1}{3}\left[p\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+p\left(-\frac{1}{x}\right)+p\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2p(x)\right],\ \forall p(x)\geqslant \sin x，且\ x\neq 0,\pm 1.$$

注　取 $p(x)=\sin x$，得到函数方程 $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sin x$ 的一个解

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{x-1}{x+1}-\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1+x}{1-x}-2x\right),\ x\neq 0,\pm 1.$$

9. 因为 $f(n)=2n+1$，在①式中取 $n=1,2,3,\cdots$，可发现

$g(1)\geqslant 3$，

$g(2)\geqslant 2g(1)+1\geqslant 3\times 2+1$，

$g(3)\geqslant 2g(2)+1\geqslant 2\cdot(3\times 2+1)+1\geqslant 3\times 2^2+2+1$，

$g(4)\geqslant 2g(3)+1\geqslant 2\cdot(3\times 2^2+2+1)+1\geqslant 3\times 2^3+2^2+2+1$，

……

$$\begin{aligned}g(n)&\geqslant 3\times 2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1\\&=3\times 2^{n-1}+2^{n-2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)\\&=3\times 2^{n-1}+\frac{2^{n-2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1-\frac{1}{2}}\\&=3\times 2^{n-1}+\frac{2^{n-2}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\\&=3\times 2^{n-1}+2^{n-1}-1.\end{aligned}$$

$$g(n)\geqslant 2^{n+1}-1.\qquad ②$$

现用数学归纳法证明此结论是正确的.



显然以 $n=1$ 代入②式,可得 $g(1)\geqslant 3$.

假设 $n=k$ 时②式成立,则当 $n=k+1$ 时,

$$g(k+1)\geqslant f[g(k)]=2g(k)+1\geqslant 2(2^{k+1}-1)+1=2^{k+2}-1,$$

故由数学归纳法可知②式成立.

10. 由已知条件,易知 $f(n)>0$,在①两边取倒数,得

$$2+\frac{1}{f(n)}\geqslant\frac{3}{f(n+1)}\ (n\geqslant 1), \qquad ②$$

两边同减去 3,得

$$\frac{1}{f(n)}-1\geqslant 3\left[\frac{1}{f(n+1)}-1\right].$$

两边同乘 3^n,得

$$3^n\left[\frac{1}{f(n)}-1\right]\geqslant 3^{n+1}\left[\frac{1}{f(n+1)}-1\right].$$

令 $3^n\left[\frac{1}{f(n)}-1\right]=g(n)$,满足 $g(1)=3\left[\frac{1}{f(1)}-1\right]=3$, $g(n)\geqslant g(n+1)$,

于是,所给函数不等式的解为

$$f(n)=\frac{3^n}{3^n+g(n)},$$

其中 $g(n)$ 是满足 $g(1)=3$, $g(n)\geqslant g(n+1)\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 的任一函数.

11. **解法 1** 引入参函数 $g(n)\ (\forall g(n)\geqslant 1)$,令

$$nf(n)-(n-1)f(n+1)=g(n),$$

$$\frac{f(n)}{n-1}-\frac{f(n+1)}{n}=\frac{g(n)}{(n-1)n}.$$

令 $n=2,3,\cdots,n-1$,

$$\frac{f(2)}{1}-\frac{f(3)}{2}=\frac{g(2)}{1\cdot 2},\ \frac{f(3)}{2}-\frac{f(4)}{3}=\frac{g(3)}{2\cdot 3},$$

$$\cdots$$

$$\frac{f(n-1)}{n-2}-\frac{f(n)}{n-1}=\frac{g(n-1)}{(n-2)(n-1)}.$$

把这上面 $(n-2)$ 个式子相加,得

$$f(2)-\frac{f(n)}{n-1}=\sum_{i=2}^{n-1}\frac{g(i)}{i(i+1)},$$

$$f(n)=2f(2)-(n-1)\sum_{i=2}^{n-1}\frac{g(i)}{i(i+1)},$$

故所给函数不等式的解是 $f(n)=2n-2-(n-1)\sum_{i=2}^{n-1}\frac{g(i)}{i(i+1)}, n\in\mathbf{N}^*$,

其中任意函数 $g(n)$ 满足 $g(n)\geqslant 1$.

解法 2 两边同除 $n(n-1)$,得



$$\frac{f(n)}{n-1}-\frac{f(n+1)}{n}\geqslant\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

$$\frac{f(n)}{n-1}-\frac{1}{n-1}\geqslant\frac{f(n+1)}{n}-\frac{1}{n},$$

引入参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant 1)$，令 $g(n)=\frac{f(n)-1}{n-1}$，则 $g(2)=\frac{f(2)-1}{2-1}=2$，所给不等式通解为

$f(n)=1+(n-1)g(n)$

其中任意函数 $g(n)$ 满足 $g(2)=2$，$g(n)\geqslant g(n+1)$，$n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 2$.

12. 由不等式(1)，得

$$f(x+y)-f(x)\geqslant f(x)[f(y)-1]+1-f(xy).$$

当 $y>0$ 时，化为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\geqslant f(x)\left[\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\right]+\frac{f(0)-f(xy)}{0-xy}\cdot x.$$

令 $y\to 0$，得

$$f'(x)\geqslant f(x)f'(0)-f'(0)x.$$

当 $y<0$ 时，化为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}\leqslant f(x)\left[\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\right]+\frac{f(0)-f(xy)}{0-xy}\cdot x.$$

令 $y\to 0$，得

$$f'(x)\leqslant f(x)f'(0)-f'(0)x.$$

所以 $f'(x)=f(x)-x$，

$$[e^{-x}f(x)]'=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=-xe^{-x},$$

$$e^{-x}f(x)=\int(-xe^{-x})dx，即 e^{-x}f(x)=xe^{-x}+e^{-x}+c$$

由 $f(0)=1$，可得 $c=0$，所以 $f(x)=x+1$

检验：当 $f(x)=x+1$ 时，容易验证 $f(x+y)\geqslant f(x)f(y)-f(xy)+1$

13. 若存在满足条件的函数 f，则对任意 $y>0$，存在 x，使得 $0<x<y$，故 $f(y)>(y-x)f^2(x)>0$，即 f 为正实数集到正实数集的函数

我们令 $x_0=1+\frac{4}{f^2(1)}$，对任意 $y\geqslant x_0$ 取 $x=1$，就有

$$f(y)>(y-1)f^2(1)\geqslant(x_0-1)f^2(1)=4. \quad ①$$

下面令 $x_n=x_0+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$ 我们证明，对任意 $y\geqslant x_n$，均有

$$f(y)\geqslant 2^{n+1}$$

事实上，当 $n=0$ 时，由 ① 可知命题成立，现设命题对 $n=k$ 时成立，考虑 $n=k+1$ 的情形，对任意 $y\geqslant x_{k+1}$，取 $x=x_k$，就有

$$f(y)>(y-x_k)f^2(x_k)\geqslant(x_{k+1}-x_k)f^2(x_k)$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}f^2(x_k)\geqslant\frac{1}{2^{k+1}}\times 2^{2k+2}=2^{k+1}$$



所以命题对 $k+1$ 成立. 从而对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 只要 $y\geqslant x_n$, 就有 $f(y)\geqslant 2^{n-2}$.

注意到, 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, 均有 $x_1+1>x_n$, 故 $f(x_1+1)\geqslant 2^{n-2}$ 对任意正整数 n 成立, 这是一个矛盾.

所以不存在符合要求的函数 f.

14. (用反证法) 假设存在这样的函数 f, 则由 ① 式, 得

$$[f(x)]^2+f(x)y-f(x+y)f(x)-f(x+y)y\geqslant f(x)y,$$

所以
$$f(x)-f(x+y)\geqslant\frac{f(x)y}{f(x)+y}. \qquad ②$$

由 ② 式知, $f(x)$ 是减函数.

首先, 我们证明: 对任意正实数 x, 都有 $f(x)-f(x+1)\geqslant\frac{1}{2}$.

事实上, 对于 $x>0$, 存在一个正整数 n, 使得 $nf(x)\geqslant 1$. $\qquad ③$

于是当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时, 利用 ② 式和 ③ 式, 得

$$f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)\geqslant\frac{f\left(x+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}}{f\left(x+\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+\dfrac{n}{nf\left(x+\frac{k}{n}\right)}}\geqslant\frac{1}{2n}.$$

所以 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f\left(x+\frac{k+1}{n}\right)\right]\geqslant n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$, 即 $f(x)-f(x+1)\geqslant\frac{1}{2}$.

对于某个正实数 x_0, 存在一个正整数 m, 使得 $m\geqslant 2f(x_0)$, 于是

$$\begin{aligned}f(x_0)-f(x_0+m)&=\sum_{i=0}^{m-1}[f(x_0+i)-f(x_0+i+1)]\\&\geqslant m\cdot\frac{1}{2}\geqslant f(x_0).\end{aligned}$$

所以 $f(x_0+m)\leqslant 0$, 矛盾.

于是命题得证.

说明 这里利用了裂项求和的方法, 同时, 充分利用了不等式的估计, 用反证法导出矛盾.

15. 当 $x>y$ 时, $f(x)-f(y)\geqslant a(x-y)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 可变成

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\geqslant af\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

令 $y\to x$, 得 $f'(x)\geqslant af(x)$.

类似地, 当 $x<y$ 时, $f(x)-f(y)\geqslant a(x-y)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 可变成

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leqslant af\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

令 $y\to x$, 得 $f'(x)\leqslant af(x)$. 又 $f'(x)\geqslant af(x)$, 所以 $f'(x)=af(x)$, 于是

$$[e^{-ax}f(x)]'=e^{-ax}f'(x)-ae^{-ax}f(x)=0.$$

所以 $e^{-ax}f(x)=c$, 故 $f(x)=ce^{ax}$, $c>0$.



说明 如果把函数不等式 $f(x)-f(y)\geqslant a(x-y)f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ 改为

$$f(x)-f(y)\geqslant a(x-y)h\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

这里 $h(x)$ 是一个已知函数，则完全类似地可得 $f'(x)=ah(x)$，进而求得其解为 $f(x)=a\int h(x)dx$。

16. $\varphi(x)=f(x)-\frac{1}{2}$，则不等式 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)-f(xy)+1$ 可化为

$\varphi(x+y)\geqslant\varphi(x)+\varphi(y)-\varphi(xy)$，且 $\varphi(0)=f(0)-\frac{1}{2}=0$。

$\varphi(x+y)-\varphi(x)\geqslant\varphi(y)+\varphi(xy)$

由于 $f(t)$ 是连续函数，所以当 $y>0$ 时，

$$\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}\geqslant\frac{\varphi(y)}{y}+\frac{\varphi(xy)}{xy}\cdot x,$$

两边取极限，得

$$\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}\geqslant\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(y)}{y}+\lim_{y\to 0}\frac{\varphi(xy)}{xy}\cdot x,$$

$$\varphi'(x)\geqslant\varphi'(0)+\varphi'(0)x.$$

当 $y<0$ 时，

$$\frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{y}\leqslant\frac{\varphi(y)}{y}+\frac{\varphi(xy)}{xy}\cdot x,$$

类似可得

$$\varphi'(x)\leqslant\varphi'(0)+\varphi'(0)x,$$

所以 $\varphi'(x)=\varphi'(0)+\varphi'(0)x$，$\varphi(x)=c+\varphi'(0)x+\frac{\varphi(0)}{2}x^2$。

由 $\varphi(0)=f(0)-\frac{1}{2}=0$，可得 $c=0$。

故所给函数不等式的解 $f(x)=\varphi(x)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\varphi'(0)x+\frac{\varphi'(0)}{2}x^2$

17. 这样的函数存在。

取 $\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，令 $f(n)=[\alpha n+\beta]$（表示 $\alpha n+\beta$ 的整数部分），$n\in\mathbf{N}^*$ 可证明 $f(n)$ 合于条件 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{N}^*$，且 $f(1)=[\alpha+\beta]=[\sqrt{5}]=2$。

$f(n+1)=[(n+1)\alpha+\beta]=[\alpha n+\beta+\alpha]\geqslant[\alpha n+\beta+1]=f(n)+1>f(n)$。

$$\begin{aligned}f(f(n))&=[\alpha[\alpha n+\beta]+\beta]=[\alpha n+\beta]+[\beta[\alpha n+\beta]+\beta]\\&=f(n)+[\beta[\alpha n+\beta]+\beta].\end{aligned}\qquad(*)$$

显然，$\alpha n+\beta$ 不是整数，于是有

$$\beta[\alpha n+\beta]+\beta<\beta(\alpha n+\beta)+\beta=n+\beta^2+\beta=n+\beta(\beta+1)=n+1,$$

$$\beta[\alpha n+\beta]+\beta>\beta(\alpha n+\beta-1)+\beta=n+\beta^2>n.$$



故 $$[\beta[\alpha n+\beta]+\beta]=n.$$
由(*)式得 $$f(f(n))=f(n)+n.$$
故 $f(n)=[\alpha n+\beta]$ 满足所有的条件.

注　所求的 $f(n)$ 不是唯一的，有多种构造形式，如：$f(n)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+\frac{1}{2}\right]$，$f(1)=2$，$f(n)=n+\max\{i<n, f(i)\le n\}$ 可验证满足题目中所给的条件.

18. (Ⅰ) 由于 $f'(x)>\frac{f(x)}{x}$ 得，$\frac{xf'(x)-f(x)}{x}>0$，而 $x>0$，则 $xf'(x)-f(x)>0$.

则 $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}>0$，因此 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(Ⅱ) 由于 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，则 $0<x_1<x_1+x_2$，而 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

则 $F(x_1)<F(x_1+x_2)$，即 $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}$，故 $(x_1+x_2)f(x_1)<x_1f(x_1+x_2)$　①

同理 $(x_1+x_2)f(x_2)<x_2f(x_1+x_2)$　②

①+②得：$(x_1+x_2)[f(x_1)+f(x_2)]<(x_1+x_2)f(x_1+x_2)$，而 $x_1+x_2>0$，

因此 $f(x_1)+f(x_2)<f(x_1+x_2)$.

(Ⅲ) 证法1　由于 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，则 $0<x_1<x_1+x_2+\cdots+x_n$，而 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $F(x_1)<F(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，即 $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$，

所以　$(x_1+x_2+\cdots+x_n)f(x_1)>x_1f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，

同理　$(x_1+x_2+\cdots+x_n)f(x_2)>x_2f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，

……　……

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)f(x_n)>x_nf(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，

以上 n 个不等式相加得：

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]>(x_1+x_2+\cdots+x_n)f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$，

而 $x_1+x_2+\cdots+x_n>0$，

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)>f(x_1+x_2+\cdots+x_n).$$

证法2　数学归纳法

(1) 当 $n=2$ 时，由(Ⅱ)知，不等式成立；

(2) 假设当 $n=k(n\ge 2)$ 时，不等式 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)>f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ 成立，

即　$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)>f(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ 成立，

则当 $n=k+1$ 时，$f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_k)+f(x_{k+1})>f(x_1+x_2+\cdots+x_k)+f(x_{k+1})$，

再由(Ⅱ)的结论，$f(x_1+x_2+\cdots+x_k)+f(x_{k+1})>f[(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}]$，

$f(x_1+x_2+\cdots+x_k)+f(x_{k+1})>f(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})$，

因此不等式 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)>f(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 对任意 $n\ge 2$ 的自然数均成立.

19. 令 $f(1)=a$，由条件(3)知

$$af(a+1)=1,$$



所以
$$f(a+1)=\frac{1}{a}.$$
又
$$f(a+1)f\left[f(a+1)+\frac{1}{a+1}\right]=1,$$
所以
$$f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a=f(1)$$
由于 f 是严格递增的，所以有
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1.$$
解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

若 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，则 $1<a=f(1)<f(a+1)=\frac{1}{a}<1$，矛盾

所以 $f(1)=a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

另外，构造函数 $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$，容易验证，这个函数满足上面三个条件

20. 当 $x>0$ 时，由(1)得
$$\frac{f[f(x)]}{x}\geqslant(\lambda+1)\frac{f(x)}{x}-\lambda,$$
即
$$\frac{f[f(x)]}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x}\geqslant(\lambda+1)\frac{f(x)}{x}-\lambda,$$
两边取极限，当 $x\to0$ 时，$f(x)\to0$，由上式可得
$$f'(0)\cdot f'(0)\geqslant(\lambda+1)f'(0)-\lambda,$$
当 $x<0$ 时，由①得
$$\frac{f[f(x)]}{x}\leqslant(\lambda+1)\frac{f(x)}{x}-\lambda,$$
类似上面的做法，可得
$$f'(0)\cdot f'(0)\leqslant(\lambda+1)f'(0)-\lambda,$$
因此，$f'(0)\cdot f'(0)=(\lambda+1)f'(0)-\lambda$，

可解得 $f'(0)=1$，或 $f'(0)=\lambda$

21. 若存在满足条件的函数 $f(x)$，则 $f(x)$ 是一个递增函数，并且对任意 $M>0$，存在 $x\in\mathbf{R}^{+}$，使得 $f(x)>M$（这个性质只需固定 x，令 $y\to\infty$ 即可得到）。

现在对 $x>y>0$，在条件式中，用 x 代 $x+y$，y 代 x，可得 $f(x)\geqslant f(y)+(x-y)f[f(y)]$，即 $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\geqslant f[f(y)]$。若 $f(y)>y$，在此式中，令 $x=f(y)$，则 $\frac{f[f(y)]-f(y)}{f(y)-y}\geqslant f[f(y)]$，得 $[y+1-f(y)]f[f(y)]\geqslant f(y)>0$，即有 $f(y)<y+1$。这表明对任意 $y\in\mathbf{R}^{+}$，有 $f(y)<y+1$。于是 $x+y+1>f(x+y)\geqslant f(x)+yf[f(x)]$，$x,y\in\mathbf{R}^{+}$。此式中固定 x，令 $y\to+\infty$，可知 $f[f(x)]\leqslant1$。

另一方面，由于对任意 $M>0$，存在 x，使得 $f(x)>M$，我们可以找到一个递增的无界正实数列 $\{c_n\}$，使得对任意 $n\in\mathbf{N}^{*}$，都有 $f(c_{n+1})>c_n$，于是，由 $f(x)$ 为递增函数，可得



$$1 \geqslant f[f(c_{n+1})] > f(c_n) > c_{n-1}$$

这与 $\{c_n\}$ 的构成矛盾，所以，命题成立.

22. 若满足题设的映射 f 存在，则对于任意的正实数 x、y，有

$$f(x+y)-f(x) > yf^2(x) \geqslant 0.$$

故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是单调递增的，所以 $f(x)$ 不能恒为 0，因此存在正实数 a，使得 $f(a) \neq 0$.

又对于任意的 $y>0$，$f(a+y) > f(a)+yf^2(a)$. ②

因为 $\lim\limits_{y\to+\infty}(f(a)+yf^2(a))=+\infty$，由②得 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，这样可取实数 $a>0$，使得 $f(a)>0$，则对于任意的 $x\geqslant a$，有 $f(x)\geqslant f(a)>0$.

对于任意实数 x，令 $y=\frac{1}{f(x)}$，由①得

$$f\left(x+\frac{1}{f(x)}\right)>2f(x) \qquad ③$$

令 $x_0=a$，$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{f(x_n)}$，$n\in\mathbf{N}$，容易证明数列 $\{x_n\}$ 是单调递增数列，所以 $x_n\geqslant a$，$n\in\mathbf{N}$.

令 $u_n=f(x_n)$，则 $u_n>0$，由③得

$$u_{n+1}=f(x_{n+1})=f\left(x_n+\frac{1}{f(x_n)}\right)>2f(x_n)=2u_n.$$

所以 $u_n\geqslant 2^n u_0$，从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$. ④

另一方面，对于 $n\geqslant 0$，

$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{f(x_n)}=\frac{1}{u_n}\leqslant\frac{1}{2^n u_0}$，求和得

$$x_{n+1}\leqslant a+\frac{1}{u_0}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}<a+\frac{1}{u_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k},$$

即

$$x_{n+1}<a+\frac{2}{u_0}$$

$$u_{n+1}=f(x_{n+1})<f\left(a+\frac{2}{u_0}\right). \qquad ⑤$$

④与⑤矛盾.

23. 假设存在函数 f 对所有的 x，$y>0$，满足 $f(x+y)\geqslant f(x)\sqrt{1+yf(x)}$ ①

易知对所有的 x，$y>0$，有

$$f(x+y)>f(x),$$

即 f 是 $\mathbf{R}^+$ 上的严格递增函数.

令 $x=1$，代入式①得

$$f(y+1)\geqslant f(1)\sqrt{1+yf(1)}. \qquad ②$$

因为 $f(1)>0$，故式②的右端可以任意大.

所以 f 是无界的.

因此存在 $x_0>0$ 使得 $f(x_0)>6$.



下面用数学归纳法证明，对所有的 $n\in\mathbf{N}$，$f\left(x_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)>6\times 2^n$

当 $n=1$ 时，由式①有

$$f\left(x_0+\frac{1}{2}\right)\geqslant f(x_0)\sqrt{1+\frac{1}{2}f(x_0)}>6\times 2.$$

假设当 $n=m$ 时结论成立，即

$$f\left(x_0+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right)>6\times 2^m$$

当 $n=m+1$ 时，由式①有

$$\begin{aligned}f\left(x_0+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^k}\right)&=f\left(\left(x_0+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{m+1}}\right)\\&\geqslant f\left(x_0+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right)\sqrt{1+\frac{1}{2^{m+1}}f\left(x_0+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^k}\right)}\\&>6\times 2^{m+1}\end{aligned}$$

因此当 $n=m+1$ 时，结论成立。

所以 $f(x_0+1)>f\left(x_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right)>6\times 2^n$，但满足条件的 $f(x_0+1)$ 不存在，因此，满足题设要求的函数 f 不存在

24. (1) 由所给条件易知，f 将 $(0,+\infty)$ 一一对应地映射到 $(0,+\infty)$

(2) 设 $x,y\in\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$，$z=f(y)$，则

$$2xz\leqslant xf(x)+zf^{-1}(z)=xf(x)+yf(y),$$

即
$$2xf(y)\leqslant xf(x)+yf(y),\qquad ①$$
且
$$2yf(x)\leqslant xf(y)+yf(x),\qquad ②$$
因此
$$xf(y)+yf(x)\leqslant xf(x)+yf(y),$$
从而
$$(x-y)(f(x)-f(y))\geqslant 0.$$

这说明 $f(x)$ 是递增函数.

(3) 由①、②即知 $f(x)$ 连续；

(4) 由①、②得 $\frac{y-x}{y}f(x)\leqslant f(y)-f(x)\leqslant\frac{y-x}{x}f(y)$.

因此 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ 介于 $\frac{f(x)}{y}$ 与 $\frac{f(y)}{x}$ 之间，利用 f 的连续性，有 $f'(x)=\frac{f(x)}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，因此，有 $f(x)=Cx$，$C>0$

容易验证，这种函数也一定满足所给的函数不等式.

因此，所求的函数的一般形式为

$$f(x)=Cx,\ (C>0\ \text{为常数})$$

25. 取 $n=2$，得 $f(x_1x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$，

$$f(x_1x_2)-f(x_1)\leqslant f(x_1)[f(x_2)-1],\qquad ①$$



注意到 $f(1)=1$，

当 $x_2>1$ 时，① 式两边同除 x_2-1，得

$$\frac{f(x_1x_2)-f(x_1)}{x_1x_2-x_1}\cdot x_1 \leqslant f(x_1)\cdot\frac{f(x_2)-f(1)}{x_2-1},$$

令 $x_2\to 1$，得

$$x_1f'(x_1)\leqslant f(x_1)f'(1). \qquad ②$$

当 $x_2<1$ 时，① 式两边同除 x_2-1，得

$$\frac{f(x_1x_2)-f(x_1)}{x_1x_2-x_1}\geqslant\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)-f(1)}{x_2-1}.$$

令 $x_2\to 1$，得 $$x_1f'(x_1)\geqslant f(x_1)f'(1). \qquad ③$$

由 ②，③，得 $$x_1f'(x_1)=f(x_1)f'(1).$$

即 $x_1[\ln f(x_1)]'=f'(1)$，$\ln f(x_1)=f'(1)\ln x_1$，所以 $f(x_1)=x_1^{f'(1)}$，故 $f(x)=x^a$

能力训练 4

1. C

2. 由偶函数定义知，$f(-x)=f(x)$，利用这一结论可知，只需比较 $f\left(\left|-\frac{3}{4}\right|\right)$ 与 $f(a^2-a+1)$ 的大小即可，而 $a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，所以 $f\left(-\frac{3}{4}\right)\geqslant f(a^2-a+1)$，选 B.

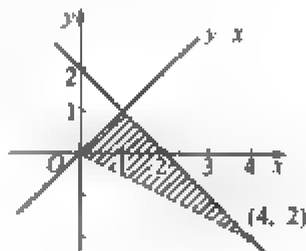
3. A

4. D　由 $f(x-1)$ 图象关于 $(1,0)$ 对称，知 $f(x)$ 为奇函数，又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，所以

$f(x^2-2x)\leqslant -f(2y-y^2)\Leftrightarrow f(x^2-2x)\leqslant f(y^2-2y)\Leftrightarrow x^2-2x\geqslant y^2-2y$，故 $x\geqslant y$ 或 $x+y\leqslant 2$

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，

$$-\frac{2}{4}\leqslant\frac{y}{x}\leqslant 1$$



故选 D

5. 第一，题目的条件有 3 个：

(1) $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的非负可导函数. 与此相关，有两个数学概念需要明确，一个是非负函数 $(f(x)\geqslant 0)$，一个是可导函数 $(f'(x)$ 存在$)$.

(2) 不等式 $xf'(x)+f(x)\leqslant 0$ 对其数学含义可以作多角度的理解，如

① $xf'(x)+f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f'(x)=-\frac{f(x)}{x}\leqslant 0$，$f(x)$ 为不增函数

② $[xf(x)]'=xf'(x)+f(x)\leqslant 0\Rightarrow F(x)=xf(x)$ 为不增函数

(3) 不等式 $0<a<b$.



第二，题目的结论是 4 个选项之一，其性质都是一个不等式，涉及 $f(a)$、$f(b)$、$af(a)$、$bf(b)$、$af(b)$、$bf(a)$ 等的比较大小

第三，条件与结论的基本联系，应是从不等式到不等式的"条件不等式证明"

这样，审题的三件事都做了，再作思路探求时，至少可从上述对 $xf'(x)+f(x)\leqslant 0$ 的理解得出两个一般性的解法.（作为选择题的特殊解法暂不讨论）

解法 1　由 $xf'(x)+f(x)\leqslant 0\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}\leqslant 0$，知 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的不增函数，对 $0<a<b$，有 $0\leqslant f(b)\leqslant f(a)$。

相乘，得 $0\leqslant af(b)\leqslant bf(a)$. 选 C

解法 2　作函数 $F(x)=xf(x)$，由

$$F'(x)=[xf(x)]'=xf'(x)+f(x)\leqslant 0,$$

知函数 $F(x)=xf(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的不增函数，对 $0<a<b$，有

$$bf(b)\leqslant af(a)$$

左边缩小，右边放大，得

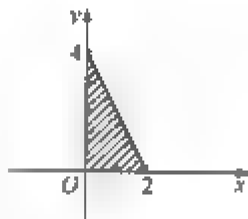
$af(b)\leqslant bf(b)\leqslant af(a)\leqslant bf(a)$. 选 C

6. B　由图知，$x\geqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增

由于 $a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，所以 $2a+b\geqslant 0$，故

$$f(2a+b)<f(4)\Leftrightarrow 2a+b<4$$

所给平面区域即 $\begin{cases} a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0, \\ 2a+b<4. \end{cases}$



面积为 $\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$. 选 B.

7. C　$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$，说明 $f(x)g(x)$ 在 R 上单调下降，所以当 $a<x<b$ 时，

$$f(b)g(b)<f(x)g(x)<f(a)g(a)$$

选 C.

8. B　9. C

10. 任取 $x_0\in P$，$x_0>f(x_0)$，有 $x_0>f[f(x_0)]$，所以 $x_0\in Q$. 这表明 $P\subseteq Q$；另一方面，任取 $y_0\in Q$，则 $y_0>f[f(y_0)]$. 下面用反证法证明 $y_0>f(y_0)$

假设 $y_0\leqslant f(y_0)$ 时，由于函数 $y=f(x)$ 是严格递增的，则有 $f(y_0)\leqslant f[f(y_0)]<y_0$，但这与所设 $y_0\leqslant f(y_0)$ 矛盾！

可见只有 $y_0>f(y_0)$，这表明 $y_0\in P$，即又有 $Q\subseteq P$

由 $P\subseteq Q$，且 $Q\subseteq P$，知 $P=Q$. 选 B.

说明　要判断集合 P 与集合 Q 之间的关系，必须用集合的定义进行证明. 本题求解的关键是由 $y_0>f[f(y_0)]$ 猜测出 $y_0>f(y_0)$，然后用反证法、分类讨论等数学思想方法进行求解



注意到本题是一个选择题,因此也可利用求解选择题的特殊化技巧,排除错误的选择支.

解 取特殊函数,令 $f(x)=2x$,则 $f[f(x)]=4x$,不等式 $x>f(x)$ 的解集 P 和 $x>f[f(x)]$ 的解集 Q 相等,于是 $P=Q$,排除 A、C、D,选 B.

11 ①、③

12 $\{x \mid 1<x<2\}$ 由 $f'(x)<0$,知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调下降.所给不等式化为

$$\begin{cases}x-1>0,\\ f(x+1)>0,\end{cases} \text{或} \begin{cases}x-1<0,\\ f(x+1)<0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}x>1,\\ f(x+1)>f(3),\end{cases} \text{或} \begin{cases}x-1<0,\\ f(x+1)<f(3),\end{cases}$$

所以
$$\begin{cases}x>1,\\ x<2,\end{cases} \text{或} \begin{cases}x<1,\\ x>2,\end{cases}(\text{无解})$$

故 $1<x<2$

13 ②③

14. 由①知 $f(x)$ 的定义域是 $[-4,4]$,由②知 $f(x)$ 是奇函数,由①、②知 $f(0)=0$,由③知函数的图像过点 $(-1,0)$,由②、③知函数的图像过点 $(1,0)$.

从以上可得知当 $x\in[-4,-1)\cup(0,1)$ 时,$f(x)>0$;

当 $x=-1,0,1$ 时,$f(x)=0$;

当 $x\in(-1,0)\cup(1,4]$ 时,$f(x)<0$.

所以 $x\cdot f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $\{x \mid -4\leqslant x\leqslant -1$ 或 $x=0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 4\}$

15. $f\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f\left(\frac{10}{3}\right)<f\left(\frac{9}{2}\right)$

在 $f(1+x)+f(1-x)=f(1)$ 中,令 $x=0$,得 $f(1)=0$

所以 $f(1+x)+f(1-x)=0$,$f(1+x)=-f(1-x)=f(x-1)$,

故 $f(x+2)=f(x)$.

由此可知,$f(x)$ 是以 2 为周期的奇函数

所以 $-f\left(\frac{10}{3}\right)=f\left(-\frac{10}{3}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)$,$f\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数,且 $0<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$,

所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<f\left(\frac{2}{3}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.故 $f\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<-f\left(\frac{10}{3}\right)<f\left(\frac{9}{2}\right)$

16. $(-2,0)$ 由 $f(2+x)=f(2-x)$,知 $f(x)$ 图像关于 $x=2$ 对称,结合 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增,可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上单调递减.又

$$1-2x^2\leqslant 1,\ 1+2x-x^2=2-(x-1)^2\leqslant 2,$$

所以
$$f(1-2x^2)<f(1+2x-x^2),$$

$$\Leftrightarrow 1-2x^2>1+2x-x^2,$$



即 $x^2+2x<0$，解得 $-2<x<0$.

17 对 $\forall x>0$，由题设有

$$f(x)\geqslant f(\sqrt{x})\geqslant f(x^{\frac{1}{4}})\geqslant\cdots\geqslant f(x^{\frac{1}{2^n}}).$$

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，故

$$f(x)\geqslant\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1).$$

故 $f(x)\geqslant 5$.

18 (1) 因为 $f(x)$ 存在反函数.

令 $f(x)=u$，$f(y)=v$，则

$$x=f^{-1}(u),\ y=f^{-1}(v).$$

所以
$$u+v=f\left[\frac{f^{-1}(u)+f^{-1}(v)}{1+f^{-1}(u)f^{-1}(v)}\right].$$

所以
$$f^{-1}(u+v)=\frac{f^{-1}(u)+f^{-1}(v)}{1+f^{-1}(u)f^{-1}(v)}.$$

令 $u=v=\frac{t}{2}$，则 $f^{-1}(t)=\dfrac{2f^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\left[f^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2}$.

故
$$|f^{-1}(x)|=\left|\frac{2f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\left[f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2}\right|\leqslant 1.$$

且易证不可能存在 x_0 使 $|f^{-1}(x_0)|=1$.

故 $|f^{-1}(x)|<1$.

从而 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

(2) 为证 $f^{-1}(x)$ 是增函数，设 $x_1<x_2$，$\Delta x=x_2-x_1$，作差 $f^{-1}(x_2)-f^{-1}(x_1)=f^{-1}(x_1+\Delta x)-f^{-1}(x_1)=\dfrac{f^{-1}(x_1)+f^{-1}(\Delta x)}{1+f^{-1}(x_1)f^{-1}(\Delta x)}-f^{-1}(x_1)=f^{-1}(\Delta x)\cdot\dfrac{1-[f^{-1}(x_1)]^2}{1+f^{-1}(x_1)f^{-1}(\Delta x)}$.

因为 $|f^{-1}(x)|<1$，

所以 $1-[f^{-1}(x_1)]^2>0$，

$$1+f^{-1}(x_1)f^{-1}(\Delta x)>0.$$

于是只需证对一切满足 $0<\Delta x<b-a$ 的 Δx，有 $f^{-1}(\Delta x)>0$.

利用反证法如下.

假设 $f^{-1}(\Delta x)\leqslant 0$，易证对一切正整数 k，有 $f^{-1}(k\Delta x)\leqslant 0$.

事实上，(i) 当 $k=1$ 时，命题成立.

(ii) 设 $f^{-1}(k\Delta x)\leqslant 0$，则

$$\begin{aligned}f^{-1}[(k+1)\Delta x]&=f^{-1}(k\Delta x+\Delta x)\\&=\frac{f^{-1}(k\Delta x)+f^{-1}(\Delta x)}{1+f^{-1}(k\Delta x)f^{-1}(\Delta x)}\leqslant 0,\end{aligned}$$



由(i)(ii)知 $f'(k\Delta x) \leqslant 0$ 对每个 $k \in \mathbf{N}^*$ 成立

这与已知中 $f'(x)$ 在 (a, b) 上大于 0 矛盾。

故当 $0 < \Delta x < b - a$ 时，$f'(\Delta x) > 0$。

从而 $f'(x_2) > f'(x_1)$。

即 $f'(x)$ 是增函数

19 令 $F(x) = f(x) + x$，则 $F(0) = 1$. 设 u 是 $f(x) = 0$ 的最小根，则 $f(u) = 0$，$F(u) = u$.

若 $u < 0$，则对于 $w = 0$，由(1)及 $F(0) \geqslant w \geqslant F(u)$ 得出，存在 $z \in [u, 0]$，使得 $F(z) = w = 0$. 由(5)知

$$0 = f(z)f(u) = f[zf(u) + uf(z) + zu]$$
$$= f[u(f(z) + z)] = f[uF(z)] = f(0) = 1,$$

矛盾，所以 $u > 0$. 对于任意实数 x，由(5)有

$$0 = f(x)f(u) = f[xf(u) + uf(x) + xu] = f[uf(x) + xu],$$

所以 $uf(x) + xu$ 是方程 $f(x) = 0$ 的根

因为 u 是 $f(x) = 0$ 的最小根，所以

$$uf(x) + xu \geqslant u.$$

从而
$$f(x) + x \geqslant 1,$$

即
$$f(x) \geqslant 1 - x,$$

所以 $f(-2007) \geqslant 2008$. 又 $f(-2007) \leqslant 2008$，所以 $f(-2007) = 2008$.

20. 考虑函数

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

显然 $g(x)$ 具有性质(1)、(2)，且当 $x, y, x + y \in [0, 1]$ 时 x, y 至少有一个属于 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. 不妨设 $x \leqslant \frac{1}{2}$，因此 $g(x) = 0$. 所以 $g(x) + g(y) = g(y) \leqslant g(x + y)$，($g(x)$ 为不减函数)，故 $g(x)$ 也具有性质(3).

取 $x = \frac{1}{2} + \varepsilon\left(0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\right)$，$c \geqslant \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \varepsilon} = \frac{2}{1 + 2\varepsilon}$，令 $\varepsilon \to 0$，即得 $c \geqslant 2$.

下证具有性质(1)～(3)的每个函数 $f(x)$，有 $f(x) \leqslant 2x$，从而所求的最小数 c 为 2

用反证法. 设有 $x_0 \in [0, 1]$ 使得 $f(x_0) > 2x_0$. 由性质(3)，取 $x = y = 0$，则 $2f(0) \leqslant f(0)$，因此 $f(0) \leqslant 0$. 但由性质(1)，$f(0) \geqslant 0$，故 $f(0) = 0$，所以 $x_0 > 0$. 由性质(3)易知 f 为不减函数，因此，

$$x_0 < \frac{1}{2} f(x_0) \leqslant \frac{1}{2}$$

再取 $x = y = x_0$，由性质(3)得到 $2f(x_0) \leqslant f(2x_0)$. 所以，$x_0 \leqslant \frac{1}{4} f(2x_0)$. 设已证 $x_0 \leqslant \frac{1}{2^k}$ 且



$$x_0 < \frac{1}{2^{k+1}} f(2^k x_0).$$

则 $x_0 \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}$，取 $x = y = 2^k x_0$，$2f(2^k x_0) \leqslant f(2^{k+1} x_0)$。

故
$$x_0 < \frac{1}{2^{k+2}} f(2^{k+1} x_0).$$

因此对任何正整数 n 有 $x_0 < \frac{1}{2^n}$，令 $n \to +\infty$，得 $x_0 = 0$，矛盾

21　在条件(1)中令 $n = 0$，得

$$f^2(1) - f^2(0) = 6f(0) + 1,$$

即　$f^2(1) = [f(0) + 3]^2 - 8.$

于是有 $[f(0) + 3 + f(1)][f(0) + 3 - f(1)] = 8 = 4 \times 2.$

由于 $f(0) + 3 + f(1)$ 与 $f(0) + 3 - f(1)$ 的差为 $2f(1)$，所以

$$\begin{cases} f(0) + 3 + f(1) = 4, \\ f(0) + 3 - f(1) = 2. \end{cases}$$

故 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$.

由条件()，得

$$[f(2n+1) + f(2n)][f(2n+1) - f(2n)] = 6f(n) + 1.$$

假设 $f(2n+1) - f(2n) = d$，则

$$f(2n+1) + f(2n) = \frac{6f(n)+1}{d}$$

消去 $f(2n+1)$，得

$$2f(2n) + d = \frac{6f(n)+1}{d},$$

故 $2df(2n) + d^2 - 1 = 6f(n)$

如果 $d > 3$，则

$2df(2n) + d^2 - 1 > 6f(2n) \geqslant 6f(n)$，矛盾

若 $d = 2$ 或 3，则 $6f(n) + 1$ 也可以被 2 或 3 整除，矛盾.

所以 $d = 1$.

于是对所有非负整数 n，有

$$f(2n) = 3f(n),$$
$$f(2n+1) = f(2n) + 1 = 3f(n) + 1.$$

若 k 为偶数，有 $f(k+1) = f(k) + 1 > f(k)$，

若 k 为奇数，因为 $f(1) > f(0)$，假设当 $n \leqslant k$ 时均有 $f(n) > f(n-1)$，则

$$f(k+1) = 3f\left(\frac{k+1}{2}\right) \geqslant 3\left[f\left(\frac{k-1}{2}\right) + 1\right] > 3f\left(\frac{k-1}{2}\right) + 1 = f(k)$$



故 f 是严格递增的函数.

$$
\begin{aligned}
f(127) &= 3f(63)+1 \\
&= 3[3f(31)+1]+1 \\
&= 3\{3[3f(15)+1]+1\}+1 \\
&= 27f(15)+13 \\
&= 27[3f(7)+1]+13 \\
&= 81[3f(3)+1]+40 \\
&= 243[3f(1)+1]+121 \\
&= 1093 < 2008,
\end{aligned}
$$

$$f(128)=3f(64)=3^2 f(32)=\cdots=3^7 f(1)$$

$$=2187>2008.$$

综上所述，共有 128 个值满足在 f 的值域中小于 2008.

22. (1) 任取正整数 a，只有有限个 d，使得 $f(a+d)<f(a)$，这是因为 $f(a+d)$ 是不同的正整数. 于是存在 n，使得对于所有的 $d(d\geqslant n)$，均有 $f(a+d)>f(a)$.

考虑无穷序列 $f(a+n)$，$f(a+2n)$，$f(a+4n)$，…，$f(a+2^k n)$，…

假设不存在三个构成等差数列的正整数满足结论，则如上的序列一定是严格递减序列. 因为如果 $f(a+2^{k+1}n)>f(a+2^k n)$，则构成等差数列的三个正整数 a，$a+2^k n$，$a+2^{k+1}n$ 满足

$$f(a)<f(a+2^k n)<f(a+2^{k+1}n).$$

所以存在均大于 $f(a)$ 且满足严格递减的无穷序列，但是在 $f(a)$ 和 $f(a+n)$ 之间只能有有限个正整数，矛盾.

因此存在正整数 a、$a+d$、$a+2d$ $(d>0)$，使得 $f(a)<f(a+d)<f(a+2d)$.

(2) 考虑排列 f：1，2，4，3，8，7，6，5，16，15，14，13，12，11，10，9，32，…，其中对于 $n\geqslant 3$，第 2^n+1 项是 2^{n+1}，第 2^n+2，…，2^{n+1} 项分别是 $2^{n+1}-1$，…，2^n+1.

下面证明，对于排列 f，有

$$f(a+2001d)>f(a+2002d) \text{ 或 } f(a+2002d)>f(a+2003d).$$

假设上面的结论不成立，则 $f(a+2001d)$、$f(a+2002d)$、$f(a+2003d)$ 严格递增. 于是这三个数应在 f 的排列中的三个不同的递减子列中，其中递减子列是从形如 2^{n+1} 到 2^n+1 的 2^n 项组成的. 因此 $a+2002d$ 所在的单调递减的子列的长度至少为 $\frac{a+2002d}{2}\geqslant 1001d$.

于是 $(a+2003d)-(a+2001d)\geqslant 1001d$（这是因为 $a+2001d$ 和 $a+2003d$ 均不在包含 $a+2002d$ 的递减的子列中），即 $2d\geqslant 1001d$，与 $d>0$ 矛盾.

所以不一定存在满足条件的正整数.

23. 必要性的证明是显然的，下面我们来证明充分性.

首先，依题意，有

$$f(a^1)=1\cdot f(a),\ f(a^2)=2\cdot f(a).$$



又 $f(a^{2^t})=2f(a^{2^{t-1}})=\cdots=2^t\cdot f(a)$.

故只需证明，当 n 不为 2 的幂次时，有 $f(a^n)=nf(a)$ 即可

下面数学归纳法证明，对任何 $n=2^t+k(1\leqslant k\leqslant 2^t-1)$，都有 $f(a^n)=nf(a)$

$$
\begin{aligned}
4f(a)=f(a^4)&=f(a^3\cdot a)\\
&\geqslant f(a^3)+f(a)=f(a^2\cdot a)+f(a)\\
&\geqslant f(a^2)+f(a)+f(a)=4f(a),
\end{aligned}
$$

则中间的不等号均应取等号

即有 $f(a^3)=f(a^2)+f(a)=3f(a)$.

从而当 $t=1$ 时，命题成立

设当 $t\leqslant m$ 时，命题成立，即对任何 $t\leqslant m$，均有 $f(a^{2^t+k})=(2^t+k)f(a)$.

当 $t=m+1$ 时，

$$
\begin{aligned}
2^{m+2}f(a)&=f(a^{2^{m+2}})\\
&=f(a^{2^{m+1}+k}\cdot a^{2^{m+1}-k})\ (1\leqslant k\leqslant 2^{m+1}-1)\\
&\geqslant f(a^{2^{m+1}+k})+f(a^{2^{m+1}-k})\\
&=f(a^{2^{m+1}-1+1+k})+f(a^{2^{m+1}-k})\\
&=f(a^{2^{m+1}-1}\cdot a^{1+k})+f(a^{2^{m+1}-k}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2^m+1\leqslant 2^{m+1}-1\leqslant 2^m+2^m-1,\\
&\Rightarrow 2^m+1\leqslant 2^{m+1}-k\leqslant 2^m+2^m-1,\\
&\Rightarrow 1\leqslant 1+k\leqslant 2^{m+1}.
\end{aligned}
$$

所以，$2^{m+2}f(a)=f(a^{2^{m+2}})$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant f(a^{2^{m+1}-1}\cdot a^{1+k})+(2^{m+1}-k)f(a)\\
&\geqslant f(a^{2^{m+1}}-1)+f(a^{1+k})+(2^{m+1}-k)f(a)\\
&=(2^{m+1}-1)f(a)+(1+k)f(a)+(2^{m+1}-k)f(a)\\
&=(2^{m+1}-1+1+k+2^{m+1}-k)f(a)\\
&=2^{m+2}f(a)
\end{aligned}
$$

故上式中所有不等号均取等号，则有

$$
\begin{aligned}
f(a^{2^{m+1}-1}\cdot a^{1+k})&=f(a^{2^{m+1}-1})+f(a^{1+k})\\
&=(2^{m+1}-1+1+k)f(a)\\
&=(2^{m+1}+k)f(a),
\end{aligned}
$$

即 $f(a^{2^{m+1}+k})=(2^{m+1}+k)f(a)$.

即当 $t=m+1$ 时，命题亦成立.



综上所述，对于任意 $n\in\mathbf{N}$，均有 $f(a^n)=nf(a)$，命题得证.

24. 首先估计 $f(n)$ 的上界. 鉴于 f 的单调性，只需考查 $f(2^k)$ 的上界. 根据条件(1)和(2)，对于 $k\in\mathbf{N}^+$ 有

$$f(2^{k+1})\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)f(2^k)\leqslant\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2^{k-1}}\right)f(2^{k-1})\leqslant\cdots\leqslant 2\lambda_k,$$

其中 $\lambda_k=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

通过对前几个 λ_k 的计算，可以猜测 $\lambda_k<5$，$k=1,2,\cdots$.

为了证明这一猜想，可采用加强命题的归纳法. 通过对 λ_k 定义式的观察分析，可将命题加强为 $\lambda_k\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^k}\right)$，$k=2,3,\cdots$.

首先，对于 $k=2$，所加强的命题显然成立，

$$\lambda_2=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=5\left(1-\frac{1}{2^2}\right).$$

假定已证得 $\lambda_m\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^m}\right)$，则有

$$\begin{aligned}\lambda_{m+1}&=\lambda_m\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}\right)\leqslant 5\left(1-\frac{1}{2^m}\right)\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}\right)\\&=5\left(1-\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)=5\left(1-\frac{1}{2^{m+1}}-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\\&<5\left(1-\frac{1}{2^{m+1}}\right).\end{aligned}$$

至此，已证明对任何 $k\in\mathbf{N}^+$，必有 $\lambda_k<5$.

对任何 $f\in S$ 和任何 $n\in\mathbf{N}^+$，存在正整数 k，使得 $n\leqslant 2^{k+1}$. 因而

$$f(n)\leqslant f(2^{k+1})\leqslant 2\lambda_k<10.$$

为了证明题目所求的最小正整数 $M=10$，还需构造一个适合题目条件的函数 f_0，该函数在某处的值大于9.

注意到 $2\lambda_5>9$. 我们定义一个函数 $f_0:\mathbf{N}^+\to\mathbf{R}$ 如下：

$$f_0(1)=2,\ f_0(n)=2\lambda_k,$$

对于 $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$ $(k\in\{0,1,2,\cdots\},\ \lambda_0=2)$.

对任何正整数 n，易见 $f_0(n+1)\geqslant f_0(n)$. 尚需验证 $f_0(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f_0(2n)$. 设 $k\in\mathbf{N}$，使得 $2^k<n\leqslant 2^{k+1}$，则 $2^{k+1}<2n\leqslant 2^{k+2}$. 于是，$f_0(2n)=2\lambda_{k+1}=\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)\times 2\lambda_k\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)f_0(n)$，即 $f_0(n)\geqslant\frac{n}{n+1}f_0(2n)$.

如上定义的 f_0 在 $n=2^6$ 处的值大于9，$f_0(2^6)=2\lambda_5>9$. 因此题目所求的最小正整数 $M=10$.

25. 首先证明：对于任意的 $n\in\mathbf{N}$ 和所有有理数 $x\geqslant 1$，有



$$nf(x)-(n-1)\varepsilon \leqslant f(nx) \leqslant nf(x)+(n-1)\varepsilon. \qquad ①$$

当 $n=1$ 时，结论显然成立

假设当 $n=k$ 时结论成立

当 $n=k+1$ 时，由条件可知对所有 x、$y \in Q_1$，有

$$f(x)+f(y)-\varepsilon < f(x+y) < f(x)+f(y)+\varepsilon.$$

取 $y=kx$ 则有

$$f(x)+f(kx)-\varepsilon < f[(k+1)x] < f(x)+f(kx)+\varepsilon.$$

由归纳假设，有

$$\begin{aligned} & f(kx)+f(x)-\varepsilon \\ > & kf(x)-(k-1)\varepsilon+f(x)-\varepsilon \\ = & (k+1)f(x)-k\varepsilon, \\ & f(kx)+f(x)+\varepsilon \\ < & kf(x)+(k-1)\varepsilon+f(x)+\varepsilon \\ < & (k+1)f(x)+k\varepsilon. \end{aligned}$$

所以当 $n=k+1$ 时结论也成立.

因此式①对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和所有有理数 $x \geqslant 1$ 成立

在式①中令 $x=1$，有

$$nf(1)-(n-1)\varepsilon \leqslant f(n) \leqslant nf(1)+(n-1)\varepsilon. \qquad ②$$

在式①中设 $x=\frac{m}{n}$，其中 m、$n \in \mathbb{N}$，$m \geqslant n$，有

$$nf\left(\frac{m}{n}\right)-(n-1)\varepsilon \leqslant f(m) \leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right)+(n-1)\varepsilon.$$

于是可得

$$f(m)-(n-1)\varepsilon \leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant f(m)+(n-1)\varepsilon.$$

由式②，有

$$mf(1)-(m+n-2)\varepsilon \leqslant nf\left(\frac{m}{n}\right) \leqslant mf(1)+(n+m-2)\varepsilon.$$

两边同时除以 m，且设 $x=\frac{m}{n}$，则有

$$\left|\frac{f(x)}{x}-f(1)\right| \leqslant \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{m}\right)\varepsilon < \left(1+\frac{1}{x}\right)\varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

设 $q=f(1)$，即知原不等式成立.



能力训练 5

1. 因为 $0<x<y$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

故 $f(x)<f(y)$，即 $f(x)-f(y)<0$. ①

又因 $0<x<y<1$，所以 $0<xy<1$，故 $f(x)+f(y)=f(xy)<f(1)<0$，

即 $f(x)+f(y)<0$. ②

由①②得 $f(y)-f(x)>0$，$-[f(y)+f(x)]>0$，以上两式相乘，得 $[f(y)]^2-[f(x)]^2<0$，即 $|f(x)|>|f(y)|$.

2. 假设对某个 $x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)>x_0$.

由题设可知，$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，又 $f(x)\leqslant f^{-1}(x)$，则 $f[f(x)]\leqslant f[f^{-1}(x)]$，即 $f[f(x)]\leqslant x$.

取 $x=x_0$，得 $f[f(x_0)]\leqslant x_0$.

又 $f(x_0)>x_0$，所以 $f[f(x_0)]>f(x_0)>x_0$，与 $f[f(x_0)]\leqslant x_0$ 矛盾.

故对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant x$.

3. 若 $a=b$，结论显然成立.

若 $a\neq b$，不妨设 $a<b$，将 $[a,b]$ n 等分，设分点为 x_i，$i=0,1,2,\cdots,n$，则

$$|f(b)-f(a)|=\left|\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{b-a}{n}\right|^2=n\left|\frac{b-a}{n}\right|^2=\frac{1}{n}(b-a)^2$$

4. 考虑单调性.

取 x_1、$x_2\in\mathbf{R}^+$，则 $x_1+x_2>x_1$，$x_1+x_2>x_2$.

就有 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}>\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\Rightarrow(x_1+x_2)f(x_1)>x_1\cdot f(x_1+x_2)$，

$\dfrac{f(x_2)}{x_2}>\dfrac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\Rightarrow(x_1+x_2)f(x_2)>x_2\cdot f(x_1+x_2)$，

以上两式相加：

$$(x_1+x_2)[f(x_1)+f(x_2)]>(x_1+x_2)\cdot f(x_1+x_2)，$$

所以 $f(x_1)+f(x_2)>f(x_1+x_2)$

（因为 $x_1+x_2>0$，故不等式两边约去 x_1+x_2 不等式不变向.）

5. 对于任意实数 x_1、x_2，由条件(1)，

$$f(x_1)\geqslant 2，f(x_2)\geqslant 2，$$

分别乘以 $\frac{1}{2}f(x_2)$，$\frac{1}{2}f(x_1)$ 再相加得

$$f(x_1)+f(x_2)\leqslant f(x_1)\cdot f(x_2)，$$



又由条件(2)得

$$f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)\leqslant f(x_1)\cdot f(x_2),$$

由于有条件(1),可对上式取对数,得

$$\lg f(x_1+x_2)\leqslant \lg f(x_1)+\lg f(x_2)$$

6 令 $g(n)-2=f(n)$,则 $g(n)=f(n)+2$ 代入①得 $4[f(n+1)+2]-3[f(n)+2]<2$.

所以 $f(n+1)<\frac{3}{4}f(n)$.

所以 $f(n+1)<\frac{3}{4}f(n)<\left(\frac{3}{4}\right)^2 f(n-1)<\cdots<\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot f(1)$.

即 $g(n+1)-2<\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot[g(1)-2]$,又 $g(1)=3$.

所以 $g(n+1)<2+\left(\frac{3}{4}\right)^n$.同理由②得

$$f(n+1)>\frac{1}{2}f(n)>\left(\frac{1}{2}\right)^2 f(n-1)>\cdots>\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot f(1).$$

即 $g(n+1)-2>\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot(x_1-2)$.

所以 $g(n+1)>2+\left(\frac{1}{2}\right)^n$.于是

$$2+\left(\frac{1}{2}\right)^n<g(n+1)<2+\left(\frac{3}{4}\right)^n(n\in\mathbf{N}^*).$$

说明 对于有些递推函数不等式,可以先由题设递推式推出与所证不等式相关的递推关系,然后由此关系式进一步推证,最后证得欲证的不等式

7 (1) 因为 $\lambda>0$,又 $f(1)=f(2)=1$,$g(1)=g(2)=2$,$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\lambda\frac{f(n)}{f(n-1)}$,$\frac{g(n+1)}{g(n)}\geqslant\lambda\frac{g(n)}{g(n-1)}$,易得 $f(n)>0$,$g(n)>0$.由 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\lambda\frac{f(n)}{f(n-1)}$,可得

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{f(2)}{f(1)}\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1},$$

同理,由 $\frac{g(n+1)}{g(n)}\geqslant\lambda\frac{g(n)}{g(n-1)}$,可得

$$\frac{g(n+1)}{g(n)}\geqslant\frac{g(2)}{g(1)}\lambda^{n-1}=\lambda^n$$

所以 $\frac{g(n+1)}{g(n)}\geqslant\frac{f(n+1)}{f(n)}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $\frac{g(n+1)}{f(n+1)}\geqslant\frac{g(n)}{f(n)}$

(2) 由 $\frac{g(n+1)}{f(n+1)}\geqslant\frac{g(n)}{f(n)}$,可得

$$\frac{g(n+1)-f(n+1)}{f(n+1)}\geqslant\frac{g(n)-f(n)}{f(n)}$$



和
$$\frac{g(n+1)}{f(n+1)} \geqslant \frac{g(1)}{f(1)} = 2,$$

所以 $g(n+1) \geqslant 2f(n+1) > f(n+1)$，从而 $g(n+1) - f(n+1) > 0$，即

$$\frac{g(n)-f(n)}{g(n+1)-f(n+1)} \leqslant \frac{f(n)}{f(n+1)} = \frac{1}{\lambda^{n-1}},$$

因此 $\frac{g(1)-f(1)}{g(2)-f(2)} + \frac{g(2)-f(2)}{g(3)-f(3)} + \cdots + \frac{g(n)-f(n)}{g(n+1)-f(n+1)}$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{\lambda} + \cdots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} = \frac{1-\frac{1}{\lambda^n}}{1-\frac{1}{\lambda}}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-1}\left(1-\frac{1}{\lambda^n}\right)$$

又因为 $\lambda > 1$，所以

$$\frac{g(1)-f(1)}{g(2)-f(2)} + \frac{g(2)-f(2)}{g(3)-f(3)} + \cdots + \frac{g(n)-f(n)}{g(n+1)-f(n+1)} < \frac{\lambda}{\lambda-1} \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

说明 若正项函数值数列 $\{f(n)\}$ 满足

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} \leqslant q \quad (n \in \mathbf{N}^*,\ q > 0),$$

则有 $f(n) \leqslant f(1)q^{n-1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ 这种等比型函数不等式问题已多次在高考中出现过.

8. 因为对一切正整数 n 与 m，$f(1,n) = 1 = C_{n-1}^{0}$，$f(m,1) = 1 = C_{m-1}^{m-1}$，即 $P(m,1)$ 与 $p(1,m)$ 为真.

假设 $p(m+1,n)$ 及 $p(m,n+1)$ 成立，即 $f(m+1,n) \leqslant C_{m+n-1}^{m}$，$f(m,n+1) \leqslant C_{m+n-1}^{m-1}$，则 $f(m+1,n+1) \leqslant f(m+1,n) + f(m,n+1) \leqslant C_{m+n-1}^{m} + C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n}^{m}$，即命题 $P(m+1,n+1)$ 成立，由归纳法知原命题成立.

9. 当 $x \geqslant 2$ 时，有

$$1 - f(x) = 1 - \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot f(x-1)\right] = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot f(x-1)\right]$$

$$= 2\cos\frac{\pi[1+f(x-1)]}{4}\sin\frac{\pi[1-f(x-1)]}{4} \qquad ①$$

因
$$f(1) = \frac{1}{2},$$

$$f(2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > f(1),$$

$$f(3) = \sin\left[\frac{\pi}{2} \cdot f(2)\right] = \sin\frac{\sqrt{2}}{4}\pi > \sin\frac{\pi}{4} = f(2)$$

由此猜想 $\frac{1}{2} \leqslant f(x) < f(x+1) < 1$ ②



下面用数学归纳法证明 ② 式成立

事实上，当 $x=1$ 时，显然成立

假设 $x=k(k\geqslant 2)$ 时命题成立，即 $\frac{1}{2}\leqslant f(k)<f(k+1)<1$，

则
$$\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}f(k)<\frac{\pi}{2}f(k+1)<\frac{\pi}{2}$$

故
$$\sin\frac{\pi}{4}\leqslant\sin\left[\frac{\pi}{2}f(k)\right]<\sin\left[\frac{\pi}{2}f(k+1)\right]<\sin\frac{\pi}{2},$$

即
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant f(k+1)<f(k+2)<1,$$

因此
$$\frac{1}{2}<f(k+1)<f(k+2)<1,$$

即 $x=k+1$ 时，命题成立 故当 $x\in\mathbf{N}_+$ 时命题成立。

于是当 $x\geqslant 2$ 时，有 $\frac{1}{2}\leqslant f(x-1)<1$ 所以 $\frac{3}{8}\pi\leqslant\frac{\pi[1+f(x-1)]}{4}<\frac{\pi}{2}$，

于是 $0<\cos\frac{\pi[1+f(x-1)]}{4}\leqslant\cos\frac{3\pi}{8}<\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，故 $0<2\cos\frac{\pi[1+f(x-1)]}{4}<1$，

据 ①，得 $1-f(x)<\sin\frac{\pi[1-f(x-1)]}{4}$ 而 $0<\frac{\pi[1-f(x-1)]}{4}\leqslant\frac{\pi}{8}$，所以 $\sin\frac{\pi[1-f(x-1)]}{4}<$
$\frac{\pi}{4}[1-f(x-1)]$

因此
$$1-f(x)<\frac{\pi}{4}[1-f(x-1)]\ (x\geqslant 2).$$

10. 设 $g(n)=f(n)-\frac{1}{n}$，则
$$g(n)<\sum_{k=n}^{2n+2006}\frac{g(k)}{k+1},\ n\geqslant 1. \qquad ①$$

下证 $b_n\leqslant 0$. 因为 $f(n)$ 有界，故存在常数 M，使得 $g(n)<M$. 当 $n>100000$ 时，我们有
$$\begin{aligned}g(n)&<\sum_{k=n}^{2n+2006}\frac{g(k)}{k+1}\\&<M\sum_{k=n}^{2n+2006}\frac{1}{k+1}\\&=M\sum_{k=n}^{\left[\frac{3n}{2}\right]}\frac{1}{k+1}+M\sum_{k=\left[\frac{3n}{2}\right]+1}^{2n+2006}\frac{1}{k+1}\\&<M\cdot\frac{1}{2}+M\cdot\frac{\frac{n}{2}+2006}{\frac{3n}{2}+1}\end{aligned}$$



$$< \frac{6}{7}M.$$

由此可以得到，对任意的正整数 m 有

$$g(n) < \left(\frac{6}{7}\right)^m M$$

于是有 $$g(n) \leqslant 0,\ n \geqslant 100000.$$

将其代入①，得

$g(n) < 0,\ n \geqslant 100000$

再次利用①，可以得：如果当 $n \geqslant N+1$ 时 $g(n) < 0$，则 $g(N) < 0$. 这就推出

$$g(n) < 0,\ n = 1, 2, 3, \cdots,$$

即 $$f(n) < \frac{1}{n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

11　显然 f 为 I 上的单调增加函数. 设 $x_0 \in [0, 1]$，则 $[f(x) - f(x_0)](x - x_0)$ 在 $[x_0, 1]$ 上单调增加且连续.

$f(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的图像被以点 $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$，$(x_i, f(x_{i-1}))$，$(x_i, f(x_i))$，$(x_{i-1}, f(x_i))$ 为顶点的矩形所覆盖.

取 $x_0 = 0$ 并取 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$，使

$$(x_i - x_{i-1})[f(x_i) - f(x_{i-1})] = \frac{1}{n^2}$$

显然，若对某个 $j \leqslant n-2$，有 $(1-x_j)[1-f(x_j)] < \frac{1}{n^2}$，那么用 $j+1 \leqslant n-1$ 个面积为 $\frac{1}{n^2}$ 的矩形就能覆盖 $f(x)$ 在 I 上的图象，而由柯西不等式即可得到

$$(1-x_j)[1-f(x_j)] \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

12　设 $M = \sup|f(x)|$，则由题设知 $M > 0$，对任意的 δ，$0 < \delta < M$，总可找到 x，使得 $|f(x)| > M - \delta$. 此时，对任意 y，有

$$\begin{aligned} 2M &\geqslant |f(x+y)| + |f(x-y)| \\ &\geqslant |f(x+y) + f(x-y)| \\ &= 2|f(x)||g(y)| > 2(M-\delta)|g(y)|, \end{aligned}$$

于是，有 $|g(y)| < \frac{M}{M-\delta} = 1 + \frac{\delta}{M-\delta}$.

令 $\delta \to 0$，即有 $|g(y)| \leqslant 1$.

说明　若将条件"$|f(x)| \leqslant 1$"改为"方程 $f(x) = 0$ 有最小正根 c 存在"，则结论仍成立. 运用"正难则反，补集思想"解题.

反证法证题其实质为"正难则反，补集思想"的应用.

(1) 赋值和反证法解决. 令 $x = y = 0$，则 $f(0) = 0$ 或 $f(0) = 1$. 若 $f(0) = 0$，则 0 为方程 $f(x) =$



0的根与方程 $f(x)=0$ 有最小正根 c 存在矛盾,故令 $x=0$,则 $f(-y)=f(y)$,即 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 反证法解决. 假设存在 x_0 使得 $|f(x_0)|>1$. 有 $2f(c+x_0)f(c-x_0)=f(2c)+f(2x_0)=[2f(c)f(c)-f(0)]+[2f(x_0)f(x_0)-f(0)]=2[f^2(x_0)-1]>0$,但是 $f(c+x_0)=2f(c)f(x_0)-f(c-x_0)=-f(x_0-c)=-f(c-x_0)$,从而 $f(x_0+c)f(c-x_0)=-f^2(c-x_0)\leqslant 0$ 与上式矛盾. 故对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $|f(x)|\leqslant 1$. 根据题中结论,可推知 $|g(y)|\leqslant 1$.

13. (利用数学归纳法)

(1) 当 $n=1$ 时,左边 $=f(x_1)$,右边 $=f(x_1)$,所以命题成立.

(2) 假设当 $n=k\ (k\geqslant 1)$ 时,命题成立,即 $(k-1)M^k+\prod\limits_{i=1}^{k}f(x_i)\geqslant M^{k-1}\sum\limits_{i=1}^{k}f(x_i)$.

则当 $n=k+1$ 时,因为

$$\left[M^k-\prod_{i=1}^{k}f(x_i)\right]\left[M-f(x_{k+1})\right]\geqslant 0,$$

所以

$$M^{k+1}+\prod_{i=1}^{k+1}f(x_i)\geqslant M\sum_{i=1}^{k}f(x_i)+M^kf(x_{k+1}).$$

由归纳假设得

$$M^{k+1}+\prod_{i=1}^{k+1}f(x_i)\geqslant M^k\sum_{i=1}^{k}f(x_i)-(k-1)M^{k+1}+M^kf(x_{k+1}),$$

即 $[(k+1)-1]M^{k+1}+\prod\limits_{i=1}^{k+1}f(x_i)\geqslant M^k\sum\limits_{i=1}^{k+1}f(x_i)$,因此当 $n=k+1$ 时,命题也成立.

由(1),(2)可知,对任何 $n\in\mathbf{N}$ 命题成立.

14. 由 $f(2-x)=f(x)$ 知,函数 $f(x)$ 图象关于直线 $x=1$ 对称,则根据②可知,对于 $x,y\in[0,1]$,若 $x+y\leqslant 1$,则 $f(x+y)\geqslant f(x)+f(y)-1$.

设 $x_1,x_2\in[0,1]$,且 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1\in[0,1]$.

因为 $f(x_2)-f(x_1)=f[x_1+(x_2-x_1)]-f(x_1)\geqslant f(x_1)+f(x_2-x_1)-1-f(x_1)$

$$=f(x_2-x_1)-1\geqslant 0.$$

所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是减函数.

(1) 因为 $f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)=f\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right)\geqslant f\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^n}\right)+f\left(\frac{1}{3^n}\right)-1\geqslant 3f\left(\frac{1}{3^n}\right)-2$,所以 $f\left(\frac{1}{3^n}\right)\leqslant\frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\frac{2}{3}\leqslant\frac{1}{3^2}f\left(\frac{1}{3^{n-2}}\right)+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{3^n}f\left(\frac{1}{3^{n-n}}\right)+\frac{2}{3^n}+\cdots+\frac{2}{3}=\frac{1}{3^{n-1}}+1-\frac{1}{3^n}=\frac{2}{3^n}+1$.

(2) 对于任意 $x\in(0,1]$,则必存在正整数 n,使得 $\frac{1}{3^n}<x\leqslant\frac{1}{3^{n-1}}$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上是不减函数,所以 $f\left(\frac{1}{3^n}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)$.

由(1)知 $f\left(\frac{1}{3^{n-1}}\right)\leqslant\frac{2}{3^{n-1}}+1=\frac{6}{3^n}+1\leqslant 6x+1$.

由①可得 $f(2)\geqslant 1$,在②中,令 $x=y=2$,得 $f(2)\leqslant 1$,故 $f(2)=1$.

而 $f(2)=f(0)$,所以 $f(0)=1$,又 $f\left(\frac{1}{3^n}\right)\geqslant f(0)$,故 $f\left(\frac{1}{3^n}\right)\geqslant 1$.



所以 $x\in[0,1]$ 时，$1\leqslant f(x)\leqslant 6x+1$

因为 $x\in[1,2]$ 时，$2-x\in[0,1]$，且 $f(x)=f(2-x)$，

所以 $1\leqslant f(2-x)\leqslant 6(2-x)+1=13-6x$，

因此，$x\in[1,2]$ 时，$1\leqslant f(x)\leqslant 13-6x$.

15. 当 $k=1$ 时，左边 $=$ 右边 $=0$.

当 $k=2$ 时，左边 $=|f(4)-f(2)|=|f(2+2)-f(2)|\leqslant 1=$ 右边

假设 $k=n$ 时，结论成立，即

$$|f(2^n)-f(2)|+|f(2^n)-f(2^2)|+\cdots+|f(2^n)-f(2^{n-1})|+|f(2^n)-f(2^n)|\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$$

成立. 当 $k=n+1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}|f(2^{n+1})-f(2^i)| &=\sum_{i=1}^{n}|f(2^{n+1})-f(2^n)+f(2^n)-f(2^i)|\\ &\leqslant n|f(2^{n+1})-f(2^n)|+\sum_{i=1}^{n}|f(2^n)-f(2^i)|\\ &\leqslant n|f(2^n+2^n)-f(2^n)|+\frac{n(n-1)}{2}\\ &\leqslant n\times 1+\frac{n(n-1)}{2}\\ &=\frac{(n+1)[(n+1)-1]}{2}\end{aligned}$$

所以，$k=n+1$ 时，结论成立.

因此，对所有整数 k，结论成立.

16. 假设当 $n=m$ 时结论成立，现证明当 $n=2m$ 时结论成立. 可以假设 $x_1\neq x_2$（否则可以重新安排）

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2m}}{2m}\right)&=f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}+\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right)\right]\\ &<\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right)+f\left(\frac{x_{m+1}+\cdots+x_{2m}}{m}\right)\right]\\ &<\frac{1}{2}\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_m)}{m}+\frac{f(x_{m+1})+\cdots+f(x_{2m})}{m}\right]\\ &=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2m})}{2m}\end{aligned}$$

于是按照归纳法，结论对于所有 2 的正整数次幂正确.

现假设 $n>2$，n 不是 2 的幂次，即假设存在整数 m，使得 $2^{m-1}<n<2^m$. 令 $k=2^m-n$，$y_i=\frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n)$，$i=1,2,\cdots,k$. 于是 $x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_k$ 为区间 (a,b) 中的 2^m 个数，所以由前面的讨论

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_k}{2^m}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(y_k)}{2^m}$$



注意到

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+y_1+y_2+\cdots+y_k}{2^m}\right)$$

$$=f\left[\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+k(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n}{2^m}\right]$$

$$=f\left[\frac{n(x_1+x_2+\cdots+x_n)+(2^m-n)(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{n\times 2^m}\right]$$

$$=f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

将上式代入最后得到的不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_k)}{2^m}$$

$$=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+kf[(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n]}{2^m},$$

两侧同乘 2^m 得到

$$2^m f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+(2^m-n)f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right).$$

由此推出所需不等式

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

17. (1) 对 $1\geqslant x\geqslant y\geqslant 0$,有

$$f(x)=f[(x-y)+y]\geqslant f(x-y)+f(y)\geqslant f(y).$$

故 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调不减.又对一切 x 有

$$f(2x)\geqslant 2f(x).$$

从而得到:当$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$时,$f(x)\leqslant f(1)\leqslant 2x$;

当$\frac{1}{4}<x\leqslant\frac{1}{2}$时,$f(x)\leqslant\frac{1}{2}f(2x)\leqslant\frac{1}{2}\leqslant 2x$;

……

当$\frac{1}{2^{n+1}}<x<\frac{1}{2^n}$时,

$$f(x)\leqslant\frac{1}{2}f(2x)\leqslant\frac{1}{2^n}\leqslant 2x.$$

……

因为 $f(0)=0$,则对一切 x 有 $f(x)\leqslant 2x$.

(2) 不成立,可举出下面的反例:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{当 } 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}; \\ 1, \text{当 } \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

此函数满足此题的一切条件，然而

$$f(0.51)=1>1.9\times 0.51=0.969.$$

18. 不妨设 $f(\alpha)>f(\beta)$，对 $m\in \mathbf{N}$，

$$\begin{aligned}[f(\alpha+\beta)]^m=f[(\alpha+\beta)^m]&=f(\sum_{i=0}^{m}C_m^i\alpha^{m-i}\beta^i)\\ &=\sum_{i=0}^{m}f(C_m^i)f(\alpha)^{m-i}f(\beta)^i\\ &\leqslant 1989\sum_{i=0}^{m}f^m(\alpha)\\ &=1989(m+1)f^m(\alpha).\end{aligned} \qquad (*)$$

若 $\dfrac{f(\alpha+\beta)}{f(\alpha)}=\lambda>1$，则在 m 充分大时

$$\lambda^m=[1+(\lambda-1)]^m>\frac{m(m-1)}{2}(\lambda-1)^2>1989(m+1)$$

与 $(*)$ 式矛盾，所以 $f(\alpha+\beta)\leqslant \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$ $\qquad (**)$

另外，由于 $f(1)=f(1\cdot 1)=f^2(1)$，知 $f(1)=1$，由于 $f^2(-1)=f(1)=1$，所以 $f(-1)=1$，从而

$$f(-\beta)=f(-1)f(\beta)=f(\beta).$$

$f(\alpha)=f(\alpha+\beta-\beta)\leqslant \max\{f(\alpha+\beta), f(\beta)\}$，但

$f(\beta)<f(\alpha)$，故 $f(\alpha)\leqslant f(\alpha+\beta)$，结合 $(**)$ 式便得结论.

19. 证法 1　由条件易知，

$$\begin{aligned}[f(b)]^2&=[f(b)-f(a)+f(a)]^2\\ &=[f(b)-f(a)]^2+2f(a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\\ &\leqslant (b-a)^2-2\frac{b-a}{\lambda}[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\\ &=\lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\cdot(b-a)[f(b)-f(a)]+[f(a)]^2\\ &\leqslant \lambda^2[f(a)]^2-\frac{2}{\lambda}\cdot\lambda(b-a)^2+[f(a)]^2\\ &=\lambda[f(a)]^2-2\lambda^2[f(a)]^2+[f(a)]^2\\ &=(1-\lambda^2)[f(a)]^2\end{aligned}$$

证法 2　$[f(b)]^2\leqslant (1-\lambda^2)[f(a)]^2 \Leftrightarrow [f(b)]^2\leqslant [f(a)]^2-[\lambda f(a)]^2 \Leftrightarrow [f(b)]^2\leqslant [f(a)]^2$



$(a-b)^2\Leftrightarrow(a-b)^2\leqslant[f(a)]^2-[f(b)]^2$

$a\neq b$时，由条件得

$$\frac{a-b}{f(a)}\cdot(a-b)^2\leqslant(a-b)[f(a)-f(b)].$$

所以$(a-b)^2\leqslant(a-b)[f(a)-f(b)]\cdot\frac{f(a)}{a-b}\cdot(a-b)\leqslant[f(a)]^2-f(a)f(b)$.

$a=b$时，此式也成立.

易知，若$f(a)f(b)\geqslant[f(b)]^2$成立，则$(a-b)^2\leqslant[f(a)]^2-[f(b)]^2$成立. 而$f(a)f(b)\geqslant[f(b)]^2\Leftrightarrow f(b)[f(a)-f(b)]\geqslant0\Leftrightarrow[f(b)-f(a_0)][f(a)-f(b)]\geqslant0$，易知$f(x)$单调递增，

则上式$\Leftrightarrow(b-a_0)(a-b)\geqslant0\Leftrightarrow(b-a_0)\lambda f(a)\geqslant0\Leftrightarrow(b-a_0)[f(a)-f(a_0)]\geqslant0\Leftrightarrow(b-a_0)(a-a_0)\geqslant0$.

由$b-a_0=a-a_0-\lambda f(a)$，$a-a_0\geqslant f(a)-f(a_0)=f(a)\geqslant\lambda f(a)$知$b-a_0$，$a-a_0$同号，则$(b-a_0)(a-a_0)\geqslant0$.

由上知结论得证.

证法3 易知$a\neq b$时，$\lambda\leqslant\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\leqslant1$，$\lambda\leqslant\frac{f(a)-f(b)}{\lambda f(a)}\leqslant1$，所以$\lambda^2\leqslant1-\frac{f(b)}{f(a)}\leqslant\lambda$，$1-\lambda\leqslant\frac{f(b)}{f(a)}\leqslant1-\lambda^2$，$f(b)\leqslant(1-\lambda^2)f(a)$，$a=b$时此式也成立，则$[f(b)]^2\leqslant(1-\lambda^2)^2[f(a)]^2\leqslant(1-\lambda^2)[f(a)]^2$

说明 本题以计算数学中数值逼近的牛顿广义迭代法为背景的，运用反证法和放缩法推证不等式，是高考中对抽象思维、逻辑推理和数学技巧进行全面考查的新颖题型.

20. 在(2)中，令$y=-x$，得

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)=f(0)=0,$$

即

$$f\left(-\frac{1}{x}\right)=-f\left(\frac{1}{x}\right)$$

故$f(x)$是奇函数.

设$-1<x_1<x_2<0$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)+f(-x_2)=f\left(\frac{\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}}{1-\frac{1}{x_1x_2}}\right)=f\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2-1}\right)$$

又 $(1+x_1)(1-x_2)>0\Leftrightarrow x_1-x_2>x_1x_2-1\Leftrightarrow-1<\frac{x_2-x_1}{x_1x_2-1}<0$

由(3)得$f\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2-1}\right)>0$，则$f(x_1)>f(x_2)$.

故$f(x)$在$(-1,0)$上是减函数.

又$f(x)$是奇函数，且$f(x)>0$，$x\in(-1,0)$，所以$f(x)$在$(0,1)$上也是减函数，且$f(x)<0$.

■ 17



$$f\left(\frac{1}{k^2+7k+11}\right)=f\left[\frac{1}{(k+3)(k+4)-1}\right]$$

$$=f\left[\frac{\frac{1}{(k+3)(k+4)}}{1-\frac{1}{(k+3)(k+4)}}\right]$$

$$=f\left[\frac{\frac{1}{k+3}+\left(-\frac{1}{k+4}\right)}{1+\frac{1}{k+3}\cdot\left(-\frac{1}{k+4}\right)}\right]$$

$$=f\left(\frac{1}{k+3}\right)+f\left(-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{k+3}\right)-f\left(\frac{1}{k+4}\right),$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$.

故 $f\left(\frac{1}{19}\right)+f\left(\frac{1}{29}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n^2+7n+11}\right)$

$=\left[f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right)\right]+\left[f\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{1}{6}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1}{n+3}\right)-f\left(\frac{1}{n+4}\right)\right]$

$=f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{n+4}\right)$

因为 $0<\frac{1}{n+4}<1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以，$f\left(\frac{1}{n+4}\right)<0$.

则
$$f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{n+4}\right)>f\left(\frac{1}{4}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right).$$

故原不等式成立.

21　假设结论不成立，则对所有不同的有理数 a、b 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2},\qquad ①$$

这个条件不受函数 f 增加一个常数的影响，因此不失一般性，我们可以假设 $f(-1)\leqslant 0$ 和 $f(1)\leqslant 0$ 成立.

我们可以断言下面的结论是成立的，即对所有 $n\in\mathbf{N}$ 和 $x\in\{-2^{-n},0,2^{-n}\}$，我们有 $f(x)\leqslant -n$. 下面对 n 用归纳法证明.

当 $n=0$ 时，考虑 $x\in\{-1,0,1\}$，有 $f(\pm 1)\leqslant 0$，因而利用 ① 式有

$$f(0)=f\left(\frac{1-1}{2}\right)<\frac{f(1)+f(-1)}{2}\leqslant 0.$$

因而当 $n=0$ 时结论成立.

现在考虑对任一固定的 n 利用 ① 式和归纳假设，有

$$f(\pm 2^{-n-1})=f\left(\frac{0\pm 2^{-n}}{2}\right)<\frac{f(0)+f(\pm 2^{-n})}{2}\leqslant\frac{-n-n}{2}=-n$$



因为 f 只取整数值，我们有 $f(\pm 2^{n+1}) \leqslant -(n+1)$。再由①式有

$$f(0) = f\left(\frac{2^{n+1} - 2^{n+1}}{2}\right)$$

$$\leqslant \frac{f(2^{n+1}) + f(-2^{n+1})}{2} \leqslant -(n+1).$$

从而完成对前面断言的归纳证明．

我们已证明对所有非负整数 n 有 $f(0) \leqslant -n$．而这是不可能的．因此不存在函数 $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Z}$ 使得对任意不同的有理数 a、b，①式成立．从而完成问题的结论证明．

22．证法1　对所有正整数 n，设 $f(n) = a$，则

$$f(a) = f(f(n)) = kn,$$

$$f(kn) = f(f(a)) = ka, \tag{1}$$

$$f(ka) = f(f(kn)) = k^2 n. \tag{2}$$

因为 $f(n) \in \mathbf{N}^*$，且 $f(n)$ 严格递增，则

$$f(n) \geqslant f(n-1) + 1 \geqslant \cdots \geqslant f(1) + (n-1) \geqslant n. \tag{3}$$

又由于 $f(n) = a$，则由③得 $a \geqslant n$．

$$k^2 n = f(ka) \geqslant f(ka-1) + 1 \geqslant \cdots \geqslant f(kn) + ka - kn$$

$$= ka + ka - kn = 2ka - kn.$$

于是 $k^2 n + kn \geqslant 2ka$，即 $a \leqslant \frac{k+1}{2}n$，从而 $f(n) \leqslant \frac{k+1}{2}n$．

又因为 $f(a) = kn$，由③ $f(n) \geqslant n$，得 $f(a) \geqslant a$，即 $kn \geqslant a$．

$$ka = f(kn) \geqslant f(kn-1) + 1$$

$$\geqslant \cdots \geqslant f(a) + kn - a$$

$$= 2kn - a,$$

$$(k+1)a \geqslant 2kn,$$

$$a \geqslant \frac{2k}{k+1}n, \quad f(n) \geqslant \frac{2k}{k+1}n.$$

所以有 $\frac{2k}{k+1}n \leqslant f(n) \leqslant \frac{k+1}{2}n$．

证法2　因为 $f: \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ 是严格递增的，所以由 $f(n) \geqslant n$，当 $m \geqslant n$ 时，$f(m) - f(n) \geqslant m - n$，即

$$f(m) \geqslant f(n) + m - n.$$

所以有 $f(n+m) \geqslant f(n) + n + m - n$，$f(n+m) \geqslant f(n) + m$．

由 $f(n) \geqslant n$，可设 $f(n) = n + m$（m 为非负整数）．

$$kn = f(f(n)) = f(n+m) \geqslant f(n) + m = f(n) + f(n) - n.$$

于是可得 $2f(n) \leqslant kn + n$，$f(n) \leqslant \frac{k+1}{2}n$．



由此立即可得 $kn = f(f(n)) \leqslant \frac{k+1}{2} f(n)$，

$f(n) \geqslant \frac{2k}{k+1} n$，所以有 $\frac{2k}{k+1} n \leqslant f(n) \leqslant \frac{k+1}{2} n$.

23. $f(n) = bn$，b 为任意给定的实数

首先证明：当 $n \geqslant 2a+3$ 时，有 $f(n+1) - f(n) = f(n) - f(n-1)$

只要证明存在正整数 u，使得

$$f(n+1) - f(n) = f(u+1) - f(u), \quad ①$$

$$f(n) - f(n-1) = f(u+1) - f(u). \quad ②$$

式 ① 等价于

$$f(n+1) + f(u) = f(n) + f(u+1)$$

由题设条件知，只要有

$$a(n+1) \leqslant u < (a+1)(n+1),$$

$$an \leqslant u+1 < (a+1)n$$

即可．也就是

$$a(n+1) \leqslant u < u+1 < (a+1)n. \quad ③$$

同理，式 ② 等价于

$$an \leqslant u < u+1 < (a+1)(n-1). \quad ④$$

由式 ③、④ 知，只需存在正整数 u，使得

$$a(n+1) \leqslant u < u+1 < (a+1)(n-1).$$

由 $(a+1)(n-1) - a(n+1) = n - 2a - 1 \geqslant 2$，

知上式成立．

其次，设 n_0 为整数，$n_0 - 1 < 2a+3 \leqslant n_0$，则 $n_0 \geqslant 3$. 由上述知

$$f(n+1) - f(n) = f(n_0) - f(n_0 - 1), \ n \geqslant n_0 - 1.$$

因此，

$$f(n) = (n - n_0 + 1)[f(n_0) - f(n_0 - 1)] + f(n_0 - 1), \ n \geqslant n_0 - 1. \quad ⑤$$

取正整数 k，m，使得

$$m \geqslant n_0, \ am \geqslant n_0, \ am \leqslant k < (a+1)m.$$

又由 $f(k+m) = f(k) + f(m)$，知

$(k + m - n_0 + 1)[f(n_0) - f(n_0 - 1)] + f(n_0 - 1)$

$= (k - n_0 + 1)[f(n_0) - f(n_0 - 1)] + f(n_0 - 1) + (m - n_0 + 1)[f(n_0) - f(n_0 - 1)] + f(n_0 - 1)$

由此得 $(n_0 - 1) f(n_0) = n_0 f(n_0 - 1)$.

令 $f(n_0 - 1) = b(n_0 - 1)$，则 $f(n_0) = bn_0$.



代入式⑤，知 $f(n)=bn$，$n\geqslant m_0-1$.

下面证明，对所有正整数 n，有 $f(n)=bn$.

若不然，设使得 $f(n)\neq bn$ 的最大正整数为 m_1.

当 $a>1$ 时，取正整数 k，使得

$$am_1\leqslant k<(a+1)m_1,$$

则 $k>m_1$，$k+m_1>m_1$，$f(k+m_1)=f(k)+f(m_1)$.

因此，
$$f(m_1)=f(k+m_1)-f(k)$$
$$=(k+m_1)b-kb=m_1b,$$

矛盾.

当 $a=1$ 时，有 $am_1\leqslant m_1<(a+1)m_1$，因此，

$$b\cdot 2m_1=f(2m_1)=f(m_1)+f(m_1),$$

从而，$f(m_1)=m_1b$，矛盾.

又当 $f(n)=bn$，b 为任意给定的正实数时，显然满足题意.

综上所述，所求的函数为 $f(n)=bn$，b 为任意给定的实数.

24. 我们应该对平面上任意点 (x,y) 找到使 $f_a(x-m,y-n)$ 尽可能小的整格点 (m,n)，并求出极小值 $\bar{f}_a(x,y)=\min\limits_{m,n}f_a(x-m,y-n)$ 的上估计，为此称 $\sqrt{f_a(x_1-x_2,y_1-y_2)}$ 为点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 之间的距离，它类似于通常之距离 $\sqrt{f_0(x_1-x_2,y_1-y_2)}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$，显然有 $\bar{f}_0(x,y)\leqslant\frac{1}{2}$，以下对"距离" $\sqrt{f_a}$，$0<a<2$，来建立把平面分成若干个图 Φmn 的分法，若点 (x,y) 到点 (m,n) 的距离小于它到任何格点之距离，就称点 (x,y) 属于图形 Φmn，我们只需找到以 $(0,0)$ 为中心的图形 $\Phi00$，其余的图形 Φmn 都可由 $\Phi00$ 平移得到. 现在利用距离 f_a 的平方是坐标的二次函数得到与点 $(0,0)$ 较近而与点 (m,n) 较远的点 (x,y) 的集合. 这是一个半平面 $(2m+an)x+(2n+am)y\leqslant m^2+amn+n^2$. 为了找到图形 $\Phi00$，应该取一切那样的半平面的交集. 实际上，只要取其中的 6 个半平面的交集，这六个半平面对应的点 (m,n) 是 $(0,\pm1)$，$(\pm1,0)$，$(1,-1)$，$(-1,1)$. 因此 $\Phi00$ 是凸六边形 $|2x+ay|\leqslant1$，$|ax+2y|\leqslant1$，$-1\leqslant x-y\leqslant1$，当 $(x,y)\in\Phi00$ 时，$f_a(x,y)$ 是此凸六边形的顶点上达到它的极大值，求出顶点的坐标并代入 f_a 的表示式中，即得到 $\bar{f}_a$ 的精确估计 $\bar{f}_a\leqslant\frac{1}{a+2}$，在 $a=2$ 时，$f_2(x,y)\leqslant\frac{1}{4}$.

25. (1) 当 $n=2^m$（$m\in\mathbf{N}$ 时），

$$\underbrace{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}_{\text{共}2^m\text{项}}$$
$$\leqslant\underbrace{2f\left[\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\right]+2f\left[\sqrt{\frac{x_3^2+x_4^2}{2}}\right]+\cdots+2f\left[\sqrt{\frac{x_{n-1}^2+x_n^2}{2}}\right]}_{\text{共}2^{m-1}\text{项}}$$



$$\leqslant 2f\left[\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k}{2^2}}\right]+\cdots+2^2f\left[\sqrt[k]{\frac{x_{n-3}^k+x_{n-2}^k+x_{n-1}^k+x_n^k}{2^2}}\right]$$

（共 2^{m-2} 项）

$$\leqslant \cdots$$

$$\leqslant 2^m f\left[\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}}\right]$$

$$=nf\left[\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}}\right]$$

(2) 当 $2^{m-1}<n<2^m(m\in\mathbf{N}^*)$ 时，添加

$$x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{2^m}=\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}},$$

由(1)可知：

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+f(x_{n+1})+\cdots+f(x_{2^m})\leqslant 2^m f\left[\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k+x_{n+1}^k+\cdots+x_{2^m}^k}{2^m}}\right],$$

将 $x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{2^m}$ 的取值代入上式并整理即得

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nf\left[\sqrt[k]{\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}}\right].$$

评析 取 $k=1$ 即得著名的琴生不等式，取 $f(x)=x\ (x\in\mathbf{R}^+)$，用数学归纳法即得对一切正整数 k，有

$$x+y\leqslant 2\sqrt[k]{\frac{x^k+y^k}{2}},$$

即可推出不等式

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^k\leqslant\frac{x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k}{n}\ (x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+).$$

能力测试6

1. A　提示：三个函数都满足条件(1)；$f_1(x)=x$ 显然满足条件(2)

$f_2(x)=2^x-1$ 满足条件(2)$\Leftrightarrow 2^s-1+2^t-1\leqslant 2^{s+t}-1\Leftrightarrow 2^s-1\leqslant 2^{s+t}-2^t\Leftrightarrow 2^s-1\leqslant 2^t(2^s-1)$，

因为 $2^t\geqslant 1$，所以上式显然成立，即 $f_2(x)=2^x-1$ 满足条件(2)

$f_3(x)=\ln(x+1)$ 满足条件(2)$\Leftrightarrow\ln(s+1)+\ln(t+1)\leqslant\ln(s+t+1)\Leftrightarrow\ln(st+s+t+1)\leqslant\ln(s+t+1)$

此结论是错误的，故 $f_3(x)$ 不满足条件(2)

故选 A.

2. A　利用特殊值法 因为 $\lambda\in[0,1$，不妨设 $\lambda=\frac{1}{2}$，则不等式变为



$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

其几何特征是：连接两点 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$ 的线段的中点 M 位于曲线 $y=f(x)$ 上横坐标为 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 的点 N 的上方或其上，即满足要求的函数应是凹函数或线性函数，故知应是函数 $f_1(x)$，$f_3(x)$，应选 A.

3. A　由 $a_{n+1}=f(a_n)$，$a_{n+1}>a_n$，得 $f(a_n)>a_n$，即 $f(x)>x$，所以 $y=f(x)$ 的图象在直线 $y=x$ 的上方，故选 A.

4. (1) 是　(2) 不是

5. $(-\infty, -3)\cup(0, 3)$　设 $H(x)=f(x)\cdot g(x)$，由题设可得 $H(x)$ 为奇函数，又 $H'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$，故当 $x<0$ 时，由 $H'(x)>0$ 知，$H(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增；又因为 $H(x)$ 为奇函数，所以 $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也单调递增，且 $H(3)=-H(-3)=0$. 根据以上信息可画出 $H(x)$ 的示意图(略)，由图即可得不等式 $f(x)\cdot g(x)<0$ 的解集是 $(-\infty, -3)\cup(0, 3)$.

6. $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$　因为当 $x>0$ 时，有 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数.

又 $f(x)$ 是偶函数，即有 $f(x)=f(-x)$ 成立，故不等式 $f(\lg x)>f(1)$ 等价于 $f(|\lg x|)>f(1)$.

又因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数，故可得 $|\lg x|<1$，解不等式可得解集为 $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$.

说明　把导数知识运用于不等式问题中，使得这类古老题型变得生机勃勃、充满新意. 解这类不等式的关键在于把所给的导数性质，合理转化为函数的性质，然后求解.

7. $\left[-1, -\frac{1}{2}\right)\cup(0, 1]$　由图知 $f(x)$ 为奇函数，故 $f(x)-f(-x)=2f(x)>-1$，所以 $f(x)>-\frac{1}{2}$. 由图象知 $-1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}$，$0<x\leqslant 1$，故答案为 $\left[-1, -\frac{1}{2}\right)\cup(0, 1]$.

说明　这是一道考察识图的试题，题目没有给出函数的解析式，而只给出图象，要求读懂图象，根据图象写出函数，然后根据函数写出不等式. 这比直接写出函数式或直接解一个不等式更有创意.

8. $(-3, -1)\cup(0, 1)$　由函数 $f(x)$ 所提供的信息，可以得到：

当 $x\in(-3, -1)$ 或 $x\in(1, 3)$ 时，$f(x)>0$；

当 $x\in(-1, 1)$ 时，$f(x)<0$.

由于不等式 $x^3\cdot f(x)<0$ 等价于

$$\begin{cases}x>0,\\ f(x)<0,\end{cases}\text{或}\begin{cases}x<0,\\ f(x)>0.\end{cases}$$

因此不等式 $x^3\cdot f(x)<0$ 的解集为 $(-3, -1)\cup(0, 1)$.

说明　用图、表背景解有关不等式，其基本的策略是：把图、表所反映出来的信息转化为函数的性质，再结合所给函数不等式的特征得其解.

9. (1) 由均值不等式得

$$1=\frac{1}{3}\left(a^{f(x)}+a^{g(x)}+a^{h(x)}\right)\geqslant\sqrt[3]{a^{f(x)+g(x)+h(x)}}\geqslant\sqrt{a}=[illegible]$$



所以，x 若是原方程的解，当且仅当

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} = a^{h(x)},\ f(x) + g(x) + h(x) = 0,$$

即 $f(x) = g(x) = h(x) = 0.$

(2) 原方程等价于

$$2^{(1+\cos\pi x)\log_2 5} + 2^{x^2-1} + 2^{2(1-|x|)} = 3.$$

设 $f(x) = (1+\cos\pi x)\log_2 5,\ g(x) = x^2 - 1,\ h(x) = 2(1-|x|)$，则

$$f(x) + g(x) + h(x) = (1+\cos\pi x)\log_2 5 + (|x|-1)^2 \geqslant 0.$$

由(1)知函数 f、g、h 有公共根，即 $x = 1$ 或 $x = -1$.

10. 由不等式 ①，得

$$f(x+y) - f(x) \geqslant f(x)[f(y)-1] + 1 - f(xy).$$

当 $y > 0$ 时，化为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \geqslant f(x)\left[\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\right] - \frac{f(0)-f(xy)}{0-xy}\cdot x.$$

令 $y \to 0$，得

$$f'(x) \geqslant f(x)f'(0) - f'(0)x.$$

当 $y < 0$ 时，化为

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} \leqslant f(x)\left[\frac{f(y)-f(0)}{y-0}\right] - \frac{f(0)-f(xy)}{0-xy}\cdot x.$$

令 $y \to 0$，得

$$f'(x) \leqslant f(x)f'(0) - f'(0)x.$$

所以 $f'(x) = f(x) - x$,

$$[e^{-x}f(x)]' = e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) = -xe^{-x},$$

$$e^{-x}f(x) = \int(-xe^{-x})\mathrm{d}x，即\ e^{-x}f(x) = xe^{-x} + e^{(-x)} + c$$

由 $f(0) = 1$，可得 $c = 0$，所以 $f(x) = x + 1$

检验：当 $f(x) = x + 1$ 时，容易验证 $f(x+y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1$

11 将数列 a_n 的项按从小到大的顺序排列成如下数表

$a_1 = f(1) + g(0)$,

$a_2 = f(2) + g(0)$, $a_3 = f(2) + g(1)$,

$a_4 = f(3) + g(0)$, $a_5 = f(3) + g(1)$,

$a_6 = f(3) + g(2)$, $a_7 = f(4) + g(0)$,

$a_8 = f(4) + g(1)$, $a_9 = f(4) + g(2)$,

$a_{10} = f(4) + g(3)$,

…

因为 $f(k+1) + g(0) > f(k) + g(k-1)$



所以，在上述数表中，第 k 行共有 k 个数目自左到右依次为 $a_{\frac{k(k-1)}{2}+1}=f(k)+g(0)$，$a_{\frac{k(k-1)}{2}+2}=f(k)+g(1)$，…，$a_{\frac{k(k-1)}{2}+i}=f(k)+g(i-1)$，…，$a_{\frac{k(k-1)}{2}+k}=f(k)+g(k-1)$。

设 a_n 在数表的第 k 行，因为 $a_{\frac{k(k-1)}{2}+i}=f(k)+g(i-1)$，

所以当 $\frac{k(k-1)}{2}+1\leqslant n<\frac{k(k+1)}{2}+1(k\in \mathbf{N})$ 时，

$$a_n=f(k)+g\left[n-1-\frac{k(k-1)}{2}\right]$$

由
$$\frac{k(k-1)}{2}+1\leqslant n<\frac{k(k+1)}{2}+1,$$

即
$$\begin{cases}k^2-k+2-2n\leqslant 0,\\ k^2+k+2-2n>0.\end{cases}$$

解得：$\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}<k\leqslant\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$.

且 $\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}-\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}=1$，所以 $k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

故 $a_n=f(k)+g\left[n-1-\frac{k(k-1)}{2}\right]$，其中 $k=\left[\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$（$[x]$ 表示高斯函数，等于不超过 x 的最大整数）

12.（1）我们先证明如下结论：

设 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $f(x)\leqslant\frac{1}{n}$.

事实上，当 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，有

$$1=f(1)=f(1-nx+nx)\geqslant f(1-nx)+f(nx)\geqslant f(nx).$$

又 $f(nx)=f(\underbrace{x+x+\cdots+x}_{n})\geqslant\underbrace{f(x)+f(x)+\cdots+f(x)}_{n}=nf(x)$，

所以 $nf(x)\leqslant 1$，即 $f(x)\leqslant\frac{1}{n}$

（2）再证明：当 $0<x\leqslant 1$ 时，有 $f(x)\leqslant 2x$

由 $0<x\leqslant 1$，知存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $\frac{1}{n+1}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$.

由（1）的结论，知 $f(x)\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\frac{2}{n+1}<2x$，即 $f(x)<2x$

（3）下面证明 $f(0)\leqslant 0$

因为对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $0\leqslant\frac{1}{n}$，由（1）的结论，知对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $f(0)\leqslant\frac{1}{n}$，两边取极限，得 $f(0)\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，即 $f(0)\leqslant 0$.

综上，对任意的 $x\in A$，有 $f(x)\leqslant 2x$.

13. 对于任意的正整数 n，$f(1+x+\cdots+x^n)=1$，这里 $\mathbf{Q}$ 为有理数集，$\mathbf{R}$ 为实数集



$$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)\Rightarrow f(1)=1,$$

$$f(1)=f((-1)\cdot(-1))=f(-1)\cdot f(-1)=1\Rightarrow f(-1)=1,$$

$$f(-a)=f(-1\cdot a)=f(-1)\cdot f(a)=f(a),$$

$$f(2)=f(1+1)\leqslant\max\{f(1),f(1)\}=1,$$

$$f(3)=f(2+1)\leqslant\max\{f(2),f(1)\}=1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(m)=f((m-1)+1)\leqslant\max\{f(m-1),f(1)\}=1,$$

其中 m 为任意正整数，所以，对任意正整数 m，恒有 $f(m)\leqslant 1$.

由于 $f(-m)=f(-1)\cdot f(m)=f(m)$，所以对一切整数 m，$f(m)\leqslant 1$.

设 x 为整数且 $f(x)\neq 1$，则 $f(x)<1$. 因为

$$1=f(1)=f(1+x-x)\leqslant\max\{f(1+x),f(x)\}\leqslant 1,$$

我们有 $f(1+x)=1$.

对 n 用数学归纳法，设已有

$$f(1+x+\cdots+x^{n-1})=1,$$

则 $f(x+x^2+\cdots+x^n)=f(x)\cdot f(1+x+\cdots+x^{n-1})$

$\qquad=f(x)<1.$

设 $y=x+x^2+\cdots+x^n$，则 $f(y)=f(x)<1$.

由上面的论证，我们有 $f(1+y)=f(1+x+\cdots+x^n)=1$.

14 (1) 设 $f(x)$ 是一个满足条件的函数，则对任意 $x>0$，都有

$$\left[\frac{f(x)}{a^{1-x}x}\right]^2\leqslant\frac{f\left(\frac{x}{a}\right)}{a^{1-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a}\right)} \qquad ①$$

如果命题不成立，即存在 $x_0>0$，使得 $f(x_0)>a^{1-x_0}x_0$，记 $\lambda_0=\frac{f(x_0)}{a^{1-x_0}x_0}$，则 $\lambda_0>1$，并且由①结合数学归纳法可知 $f\left(\frac{x_0}{a^n}\right)\geqslant\lambda_0^{2^n}a^{1-\frac{x_0}{a^n}}\left(\frac{x_0}{a^n}\right)$. ②

对任意正整数 n 成立，于是，记 $x_n=\frac{x_0}{a^n}$，$\lambda_n=\frac{f(x_n)}{a^{1-x_n}x_n}$，则②式表明：$\lambda_n\geqslant\lambda_0^{2^n}$.

另一方面，由题给条件，可知 $\frac{f(x_{n+1})}{f(x_n)}\geqslant\frac{f(x_n)}{ax_n}=\frac{\lambda_n a^{1-x_n}x_n}{ax_n}=\frac{\lambda_n}{a}$，$n=0,1,2,\cdots$，所以，

$$f(x_{n+1})\geqslant\frac{\lambda_n}{a}f(x_n)\geqslant\frac{\lambda_0^{2^n}}{a}f(x_n). \qquad ③$$

由于 $\lambda_0>1$，故存在正整数 N，使得对任意 $n>N$，都有 $\lambda_0^{2^n}>2a$，于是，当 $n>N$ 时，$f(x_{n+1})>2f(x_n)$（这一点由③可知）. 进而当 n 充分大时，有 $f(x_n)\geqslant 2^{n-N}$. 然而，$x_n=\frac{x_0}{a^n}$，且 $a>1$，故 n 充分大



时，有 $x_n < \frac{1}{2^{2005}}$，这与条件矛盾，所以，(1) 成立.

(2) 注意到，对任意 $x > 0$，存在唯一的整数 n，使得 $a^n x \in (1, a]$，记 $x_0 = a^n x$，定义 $\lambda(x) = x_0^{2^n}$.
现在，取 $f(x) = \lambda(x) a^{1-r} x^r$. 下证：$f(x)$ 符合要求.

事实上，由 $\lambda(x)$ 的定义可知 $\lambda(x) = \lambda\left(\frac{x}{a}\right)$，并且对任意 $x > 0$，有 $\lambda(x) > 1$，于是，

$$f^2(x) = \lambda^2(x) a^{2-2r} x^{2r} = \lambda\left(\frac{x}{a}\right) \cdot ax \cdot a^{1-r}\left(\frac{x}{a}\right)^r = ax f\left(\frac{x}{a}\right)$$

并且对任意 $x > 0$，都有 $f(x) > a^{1-r} x^r$，问题获解.

15. 我们证明对任意不超过 1997 的正整数 m, n，

$$mf(n) + m > nf(m), \quad ①$$

当 $m = n$ 时，① 显然成立. 当 $m = 2, n = 1$ 或 $m = 1, n = 2$ 时，① 也显然成立. 假设当 m, n 都小于 $k(3 \leqslant k \leqslant 1997)$ 时，① 成立. 考虑 m, n 中较大的为 k 的情况.

若 $m = k$，设 $m = qn + r$，q 为自然数，$0 \leqslant r < n$. 由已知
$f(m) \leqslant f(qn) + f(r) + 1 \leqslant f[(q-1)n] + f(n) + f(r) + 2 \leqslant \cdots \leqslant f(n) + (q-1)f(n) + q$
$= qf(n) + f(r) + q$.

于是利用归纳假设 $rf(n) + r > nf(r)$，便有

$$nf(m) \leqslant nqf(n) + nf(r) + nq = mf(n) + m - [rf(n) - nf(r) + r] < mf(n) + m$$

若 $n = k$，设 $n = qm + r$，q 为正整数，$0 \leqslant r < m$. 由已知，

$$f(n) \geqslant f(qm) + f(r) \geqslant f[(q-1)m] + f(m) + f(r) \geqslant \cdots \geqslant qf(m) + f(r).$$

于是利用归纳假设 $mf(r) + rf(m)$，便有

$$mf(n) + m \geqslant mqf(m) + mf(r) + m > nf(m) + mf(r) + m - rf(m) > nf(m)$$

因此恒有 ① 成立，即 $\frac{f(n)+1}{n} > \frac{f(m)}{m}$

取 $x = \max\limits_{1 \leqslant m \leqslant 1997} \frac{f(m)}{m}$，则对任一自然数 $1 \leqslant n \leqslant 1997$，$\frac{1}{n} f(n) \leqslant x < \frac{1}{n}[f(n)+1]$，即 $[nx] = f(n)$

16. (1) 假设存在正整数数列 $f(n)$ 满足条件

因为 $f^2(n+1) \geqslant 2f(n)f(n+2)$，$f(n) > 0$，所以，

$$\frac{f(n)}{f(n-1)} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{f(n-1)}{f(n-2)} \leqslant \frac{1}{2^2} \cdot \frac{f(n-2)}{f(n-3)} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{f(2)}{f(1)}，对\ n = 3, 4, \cdots.$$

又 $\frac{f(2)}{f(1)} \leqslant \frac{1}{2^{2-2}} \cdot \frac{f(2)}{f(1)}$，则有 $\frac{f(n)}{f(n-1)} \leqslant \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{f(2)}{f(1)}$，对 $n = 2, 3, 4, \cdots$ 成立，所以，

$$f(n) \leqslant \left[\frac{1}{2^{n-2}} \cdot \frac{f(2)}{f(1)}\right] \cdot f(n-1) \leqslant \frac{1}{2^{(n-2)+(n-3)}} \cdot \left[\frac{f(2)}{f(1)}\right]^2 \cdot f(n-2)$$
$$\leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^{(n-2)+\cdots+1}} \cdot \left[\frac{f(2)}{f(1)}\right]^{n-2} \cdot f(2)$$



故 $f(n) \leqslant \left[\frac{f^2(2)}{2^{n-2}}\right]^{\frac{n-2}{2}} \cdot \frac{1}{f^{n-2}(1)}$

设 $f^2(2) \in [2^k, 2^{k+1})$，$k \in \mathbf{N}$，取 $t = k + 3$，则有

$$f(t) \leqslant \left(\frac{a_2^2}{2^{t-2}}\right)^{\frac{t-2}{2}} \cdot \frac{1}{f^{t-2}(1)} < \left(\frac{2^{k+1}}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{2}} \cdot \frac{1}{f^{k+1}(1)} \leqslant 1.$$

这与 $f(t)$ 是正整数矛盾

所以，不存在正整数的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足条件

(2) $f(n) = \frac{\pi}{2^{(n-1)^2}}$ 就是一个满足条件的正无理数的无穷数列．此时，有 $f^2(n+1) = 4f(n)f(n+2) \geqslant 2f(n)f(n+2)$

17．先证明下面的引理

引理　若函数 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 对于每一个 $n \in \mathbf{N}$ 都有 $f(n) < f(n+1)$，则对于任何的 $m, n \in \mathbf{N}$，$m \geqslant n$，必有 $f(m) - f(n) \geqslant m - n$，且 $f(m) \geqslant m$.

引理的证明：因为 $f(n) < f(n+1)$，且 $f(n)$、$f(n+1)$ 都是非负整数，所以，

$$f(n+1) - f(n) \geqslant 1,$$

$$f(n+2) - f(n+1) \geqslant 1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f(m) - f(m-1) \geqslant 1$$

将以上 $m-n$ 个不等式相加得

$$f(m) - f(n) \geqslant m - n.$$

上式中取 $n = 0$ 得

$$f(m) \geqslant m + f(0) \geqslant m.$$

下面证明原题

由 $f(f(n)) = n + 2k$ 及引理得

$$n + 2k - f(n) = f(f(n)) - f(n) \geqslant f(n) - n,$$

即 $$f(n) \leqslant n + k (n \in \mathbf{N}). \quad ①$$

在式①中，把 n 换为 $f(n)$ 得

$$n + 2k = f(f(n)) \leqslant f(n) + k.$$

即 $$f(n) \geqslant n + k (n \in \mathbf{N}). \quad ②$$

由式①、②得 $f(n) = n + k (n \in \mathbf{N})$.

显然，此函数满足题目要求

综上，所求的函数只有 $f(n) = n + k (n \in \mathbf{N})$

18．(1) 先证 $f(n) \leqslant f(n+1) (n \in \mathbf{N}^*)$

若存在 $k \in \mathbf{N}^*$，$f(k) > f(k+1)$，则 $f(k) \geqslant f(k+1) + 1$.

由已知 $f(k+2) \leqslant 2f(k+1) - f(k) \leqslant 2[f(k) - 1] - f(k) = f(k) - 2$，

故 $$f(k) \geqslant f(k+2) + 2.$$



同样可得 $f(k) \geqslant f(k+3)+3, \cdots, ak \geqslant f(k+m)+m$.

设 $f(k)=m$，则有 $f(k+m) \leqslant f(k)-m=0$，与已知矛盾，故假设不成立，即 $f(n) \leqslant f(n+1)$ 对于任意正整数 n 均成立.

(2) 若存在 $k \in \mathbf{N}^{*}, f(k)=f(k+1)$，则由(1)得 $f(k+2) \geqslant f(k)$.

由已知
$$f(k+2) \leqslant 2f(k+1)-f(k)=f(k),$$
故
$$f(k+2)=f(k)$$
同样 $f(k)=f(k+3)=f(k+4)=\cdots$，结论成立.

(3) 若对于任意 $k \in \mathbf{N}^{*}, f(k) \neq f(k+1)$，则由(1)得 $f(k)<f(k+1)$，由已知可得
$$f(n+1)-f(n) \leqslant f(n)-f(n-1). \qquad (*)$$

在所有的 $f(n+1)-f(n)(n \in \mathbf{N}^{*})$ 中，每一个都是正整数，必有一个最小的，不妨设 $f(k+1)-f(k)$ 最小，则
$$f(k+2)-f(k+1) \geqslant f(k+1)-f(k).$$

而由(*)式可知
$$f(k+2)-f(k+1) \leqslant f(k+1)-f(k).$$

所以
$$f(k+2)-f(k+1)=f(k+1)-f(k).$$

同样对于任意 $n(n \geqslant k)$，都有
$$f(n+1)-f(n)=f(k+1)-f(k).$$

即对于任意 $n \geqslant k$，点 $(n, f(n))$ 都在过点 $(k, f(k))$，斜率为 $f(k+1)-f(k)$ 的一条直线上，结论成立.

另证 由 $\frac{f(n-1)+f(n+1)}{2} \leqslant f(n)$ 得 $f(n+1)-f(n) \leqslant f(n)-f(n-1) \leqslant \cdots \leqslant f(2)-f(1)$.

若
$$f(n+1)-f(n)<f(2)-f(1),$$
因为 $f(n)$ 为整数，所以
$$f(3)-f(2) \leqslant m-1, f(4)-f(3) \leqslant m-2, \cdots, f(m+2)-f(m+1) \leqslant m-m=0,$$
所以 $f(n)$ 中，当 $n>m+1$ 时，数列递减，且 $f(n)-f(n-1) \in \mathbf{Z}$.

故必存在 $f(n) \leqslant 0$ 与已知矛盾.

所以 $f(n+1)-f(n)=f(2)-f(1)$，$\{f(n)\}$ 是等差数列.
$$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f(2)-f(1),$$

即点 $(n, f(n))$ 在过点 $(1, f(1))$，斜率为 $f(2)-f(1)$ 的直线上.

19 由于 X 是有限集，从而 X 的一切偶子集的数目是有限的. 令 P 是 X 的 f 取值最大且元素个数最少的偶子集，Q 是 P 相对于 X 的余集，可以证明上述 P、Q 满足所给性质.

(Ⅰ) 显然有 $P \cap Q=\varnothing, P \cup Q=X$;

(Ⅱ) 由假设(1)及 P 的取法易知
$$f(P) \geqslant f(D)>1990.$$

由假设(2)可得 $\quad f(\varnothing)=f(\varnothing)+f(\varnothing)-1990$,



所以 $f(\varnothing)=1990$，从而 $P\neq\varnothing$。对于 P 的任何非空子集 S，令 $\bar{S}$ 是 S 相对于 P 的余集，则

$$S\cap\bar{S}=\varnothing,\ S\cup\bar{S}=P.$$

若 $f(S)\leqslant 1990$，则由假设(2)可知

$$f(P)=f(\bar{S})+f(S)-1990\leqslant f(\bar{S}).$$

又 $S\neq\varnothing$，从而 $\bar{S}$ 的元素的个数少于 P 的元素的个数，与 P 的取法矛盾。因此，$f(S)>1990$。

另，任取 Q 的子集 T，由于 $P\cap T=\varnothing$，若 $f(T)>1990$，则由假设(2)可知

$$f(P\cap T)=f(P)+f(T)-1990>f(P),$$

也与 P 的取法矛盾。因此，$f(T)\leqslant 1990$。

20. 因为 $f(n+1)-f(n)=\frac{1}{2}f^2(n)-2f(n)+2=\frac{1}{2}[f(n)-2]^2\geqslant 0$，故 $f(n+1)\geqslant f(n)$，即数列 $\{f(n)\}$ 为递增数列。

(1) ① 由 $f(1)=4$ 及 $f(n+1)=\frac{1}{2}f^2(n)-f(n)+2$ 可求得 $f(2)=6$，$f(3)=14$，于是当 $n\geqslant 2$ 时，$f(n)\geqslant 6$，于是 $f(n+1)-2f(n)=\frac{1}{2}f^2(n)-3f(n)+2=\frac{1}{2}(f(n)-3)^2-\frac{5}{2}>0$，即当 $n\geqslant 2$ 时，$f(n+1)\geqslant 2f(n)$。

② 由于 $n\geqslant 2$ 时，$f(n+1)>2f(n)$，所以 $n\geqslant 2$ 时，$f(n+1)>2^{n-1}f(2)=6\cdot 2^{n-1}=3\cdot 2^n$。

由 $f(n+1)=\frac{1}{2}f^2(n)-f(n)+2$ 可得 $\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{1}{2}f(n)+\frac{2}{f(n)}-1$。

先用数学归纳法证明下面的不等式成立：

$$\frac{1}{2}f(n)>\left(\frac{3}{2}\right)^n+1\quad(n\geqslant 3).$$

1) 当 $n=3$ 时，$\frac{1}{2}f(3)=7>\left(\frac{3}{2}\right)^3+1$，结论成立。

2) 假设结论对 $n=k(k\geqslant 3)$ 成立，即 $\frac{1}{2}f(k)>\left(\frac{3}{2}\right)^k+1$，则结合①的结论可得 $\frac{1}{2}f(k+1)>f(k)>2\left(\frac{3}{2}\right)^k+2>\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+1$，即当 $n=k+1$ 时结论也成立。

综合1)，2)可知，不等式 $\frac{1}{2}f(n)>\left(\frac{3}{2}\right)^n+1$ 对一切 $n\geqslant 3$ 都成立。

因此，当 $n\geqslant 3$ 时，$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{1}{2}f(n)+\frac{2}{f(n)}-1>\frac{1}{2}f(n)-1>\left(\frac{3}{2}\right)^n$，即 $f(n+1)>\left(\frac{3}{2}\right)^n f(n)$。

又 $f(2)=6=\left(\frac{3}{2}\right)\cdot f(1)$，$f(3)=14>\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot f(2)=13.5$，所以当 $n\geqslant 1$ 时，有 $f(n+1)\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^n f(n)$。

(2) 由于 $f(1)=1$，而数列 $\{f(n)\}$ 为递增数列，故当 $n\geqslant 1$ 时，有 $f(n)>1$



由 $f(n+1)=\frac{1}{2}f^2(n)-f(n)+2$ 可得 $\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{f(n)-2}-\frac{1}{f(n+1)-2}$，而 $f(1)=1$，于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{f(k)-2}-\frac{1}{f(k+1)-2}\right]$$

$$=\frac{1}{f(1)-2}-\frac{1}{f(n+1)-2}=\frac{1}{2-f(n+1)}-1$$

下面先证明：当 $n\geqslant 5$ 时，有 $f(n)<2-\frac{1}{n-1}$　(*)

(1) 根据 $f(1)=1$ 及 $f(n+1)=\frac{1}{2}f^2(n)-f(n)+2$，计算易得 $f(2)=\frac{3}{2}$，$f(3)=\frac{13}{8}$，$f(4)=\frac{217}{128}$，$f(5)=\frac{1}{2}\left(\frac{217}{128}\right)^2-\frac{217}{128}+2=2-\frac{217}{128}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{217}{128}\right)$，而 $\frac{217}{128}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{217}{128}\right)=\frac{217}{128}\cdot\frac{39}{256}>\frac{1}{4}$，故 $f(5)<2-\frac{1}{4}$，即当 $n=5$ 时，结论成立

(2) 假设结论对 $n=k(k\geqslant 5)$ 成立，即 $f(k)<2-\frac{1}{k-1}$

因为 $f(n+1)=\frac{1}{2}[f(n)-1]^2+\frac{3}{2}$，而函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$ 在 $x>1$ 时为增函数，所以

$f(k+1)<\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{k-1}-1\right)^2+\frac{3}{2}=2-\frac{1}{k-1}+\frac{1}{2(k-1)^2}<2-\frac{1}{k}$，

即当 $n=k+1$ 时结论也成立

综合(1)，(2)可知，不等式 $f(n)<2-\frac{1}{n-1}$ 对一切 $n\geqslant 5$ 都成立

于是当 $n\geqslant 5$ 时，$f(n+1)<2-\frac{1}{n}$，故 $\frac{1}{2-f(n+1)}<n$，所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}=\frac{1}{2-f(n+1)}-1<n-1$

21. (1) 由 α 凸函数的定义，对 $\forall x_i\in D(i=1,2,3,4)$，有

$$\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)\geqslant f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2],\qquad ②$$

$$\alpha f(x_3)+(1-\alpha)f(x_4)\geqslant f[\alpha x_3+(1-\alpha)x_4],\qquad ③$$

$$\alpha f[\alpha x_1+(1-\alpha)x_2]+(1-\alpha)f[\alpha x_3+(1-\alpha)x_4]\geqslant f[\alpha^2x_1+\alpha(1-\alpha)x_2+\alpha(1-\alpha)x_3+(1-\alpha)^2x_4],\qquad ④$$

联合②③④得

$\alpha[\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)]+(1-\alpha)[\alpha f(x_3)+(1-\alpha)f(x_4)]\geqslant f[\alpha^2x_1+\alpha(1-\alpha)x_2+\alpha(1-\alpha)x_3+(1-\alpha)^2x_4]$，

取 $x_1=x_4=\alpha^2x_1+\alpha(1-\alpha)x_2+\alpha(1-\alpha)x_3+(1-\alpha)^2x_4$，即 $x_1=x_4=\frac{x_2+x_3}{2}$，上式可化为

$$f(x_2)+f(x_3)\geqslant 2f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right),$$

由于 $\forall x_i\in D(i=2,3)$，这就证明了 $f(x)$ 为 D 上的 J 凸函数

(2)（用数学归纳法）当 $n=1$ 时，$\frac{\alpha^n}{\alpha^n+(1-\alpha)^n}=\alpha$，由条件，结论显然成立；



假设 $n=k(k\in\mathbf{N},k\geq 1)$ 时，"$f(x)$ 为 D 上的 $\frac{a^k}{a^k+(1-a)^k}(k\in\mathbf{N},k\geq 1)$ 凸函数"结论成立，即对 $\forall x_1,x_2\in D$，都有

$$\frac{a^kf(x_1)+(1-a)^kf(x_2)}{a^k+(1-a)^k}\geq f\left[\frac{a^kx_1+(1-a)^kx_2}{a^k+(1-a)^k}\right],$$

同理，对 $\forall x_3,x_4\in D$，有

$$\frac{a^kf(x_3)+(1-a)^kf(x_4)}{a^k+(1-a)^k}\geq f\left[\frac{a^kx_3+(1-a)^kx_4}{a^k+(1-a)^k}\right],$$

又 $af\left[\frac{a^kx_1+(1-a)^kx_2}{a^k+(1-a)^k}\right]+(1-a)f\left[\frac{a^kx_3+(1-a)^kx_4}{a^k+(1-a)^k}\right]$

$\geq f\left[\frac{a^{k+1}x_1+a(1-a)^kx_2+a^k(1-a)x_3+(1-a)^{k+1}x_4}{a^k+(1-a)^k}\right]$，

联合上面三个不等式，可得

$a\frac{a^kf(x_1)+(1-a)^kf(x_2)}{a^k+(1-a)^k}+(1-a)f\frac{a^kf(x_3)+(1-a)^kf(x_4)}{a^k+(1-a)^k}$

$\geq f\left[\frac{a^{k+1}x_1+a(1-a)^kx_2+a^k(1-a)x_3+(1-a)^{k+1}x_4}{a^k+(1-a)^k}\right]$，

取 $x_2=x_3=\frac{a^{k+1}x_1+a(1-a)^kx_2+a^k(1-a)x_3+(1-a)^{k+1}x_4}{a^k+(1-a)^k}$，

即 $x_2=x_3=\frac{a^{k+1}x_1+(1-a)^{k+1}x_4}{a^{k+1}+(1-a)^{k+1}}$，由上式可得

$$\frac{a^{k+1}f(x_1)+(1-a)^{k+1}f(x_4)}{a^{k+1}+(1-a)^{k+1}}\geq f\left[\frac{a^{k+1}x_1+(1-a)^{k+1}x_4}{a^{k+1}+(1-a)^{k+1}}\right]$$

因此 $f(x)$ 为 D 上的 $\frac{a^{k+1}}{a^{k+1}+(1-a)^{k+1}}(k\in\mathbf{N},k\geq 1)$ 凸函数，这就证明了 $n=k+1$ 时结论成立。由归纳原理，对一切正整数 n 结论都成立。

23. 当 $x^2>y^2$ 时，由已知函数不等式，得

$$\frac{f(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\geq\frac{xf(x)-yf(y)}{x^2-y^2},$$

令 $y\to x$，并利用罗比塔求导法求极限，得

$\lim\limits_{y\to x}\frac{f(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\geq\lim\limits_{y\to x}\frac{xf(x)-yf(y)}{x^2-y^2}$，$f'(0)\geq\lim\limits_{y\to x}\frac{-f(y)-yf'(y)}{2y}$，$f'(0)\geq\frac{f(x)+xf'(x)}{2x}$.

当 $x^2<y^2$ 时，由已知函数不等式，得

$$\frac{f(x^2-y^2)}{x^2-y^2}\leq\frac{xf(x)-yf(y)}{x^2-y^2},$$

令 $y\to x$，并利用罗比塔求导法求极限方法，得

$$f'(0)\leq\frac{f(x)+xf'(x)}{2x},$$



所以 $f'(0)=\frac{f(x)+xf'(x)}{2x}$，即 $[xf(x)]'=2f'(0)x$，$xf(x)=f'(0)x^2+c$，$\forall x\in\mathbb{R}$.

结合 $f(0)=0$，知 $c=0$，$xf(x)=f'(0)x^2$，$\forall x\in\mathbb{R}$. 所以所给函数不等式的解是 $f(x)=f'(0)x$.

思考题　当 $f(0)\neq 0$ 时函数不等式的解，留给读者自行研究解决.

23. 显然，$f=0$ 是问题的解.

设 $f\neq 0$，则 $f(1)\neq 0$. 否则，对任意正整数 n 有 $f(n)=f(1)f(n)=0$，矛盾. 于是得 $f(1)=1$.

由(1)可知 $f(2)\geqslant 1$. 下面分两种情况讨论：

(Ⅰ) $f(2)=1$，则可证 $f(n)=1(\forall n)$. ①

事实上，由(2)知 $f(6)=f(2)f(3)=f(3)$. 记 $f(3)=a$，则 $a\geqslant 1$.

由于 $f(3)=f(6)=a$，利用(1)可知 $f(4)=f(5)=a$. 利用(2)知，对任意奇数 p 有 $f(2p)=f(2)f(p)=f(p)$.

再由此及(1)可证 $f(n)=a(\forall n\geqslant 3)$. ②

事实上，$a=f(3)=f(6)=f(5)=f(10)=f(9)=f(18)=f(17)=f(34)=f(33)=\cdots$

由②和(2)得 $a=1$，即 $f=1$，故①式成立.

(Ⅱ) $f(2)>1$，设 $f(2)=2^{\alpha}$，其中 $\alpha>0$.

令 $g(x)=f^{\frac{1}{\alpha}}(x)$，则 $g(x)$ 满足(1)，(2)，且 $g(1)=1$，$g(2)=2$.

设 $k\geqslant 2$，则由(1)得

$$\begin{aligned}2g(2^{k-1}-1)&=g(2)g(2^{k-1}-1)=g(2^k-2)\\&\leqslant g(2^k)\leqslant g(2^k+2)=g(2)g(2^{k-1}+1)=2g(2^{k-1}+1).\end{aligned}$$

若 $k\geqslant 3$，则

$$\begin{aligned}2^2g(2^{k-2}-1)&=2g(2^{k-1}-2)\leqslant g(2^k)\leqslant 2g(2^{k-1}+2)\\&=2^2g(2^{k-2}+1)\end{aligned}$$

依此类推，用归纳法得

$$2^{k-1}\leqslant g(2^k)\leqslant 2^{k-1}g(3)(\forall k\geqslant 2). \quad ③$$

同样，对任意 $m\geqslant 3$，$k\geqslant 2$ 有

$$g^{k-1}(m)g(m-1)\leqslant g(m^k)\leqslant g^{k-1}(m)g(m+1). \quad ④$$

显然，当 $k=1$ 时，③、④也成立.

任取 $m\geqslant 3$，$k\geqslant 1$，有 $s\geqslant 1$，使得

$$2^s\leqslant m^k<2^{s+1}.$$

于是，有 $s\leqslant k\log_2 m<s+1$

即
$$k\log_2 m-1<s\leqslant k\log_2 m. \quad ⑤$$

由(1)可知
$$g(2^s)\leqslant g(m^k)\leqslant g(2^{s+1}).$$

再由③、④得

$$\begin{cases}2^{s-1}\leqslant g^{k-1}(m)g(m+1),\\ g^{k-1}(m)g(m-1)\leqslant 2^{s}g(3)\end{cases}$$



即

$$\frac{2^{r-1}}{g(m+1)} \leqslant g^{k-1}(m) \leqslant \frac{2^{r-1}g(3)}{g(m-1)},$$

$$\frac{g(m)}{g(m+1)} \cdot 2^{r-1} \leqslant g^{k}(m) \leqslant \frac{g(m)g(3)}{g(m-1)} \cdot 2^{r-1}.$$

由 ⑤ 得

$$\frac{g(m)}{4g(m+1)} \cdot 2^{\log_2 m^k} \leqslant g^{k}(m) \leqslant \frac{g(m)g(3)}{2g(m-1)} \cdot 2^{\log_2 m^k},$$

从而

$$\sqrt[k]{\frac{g(m)}{4g(m+1)}} \cdot m \leqslant g(m) \leqslant \sqrt[k]{\frac{g(m)g(3)}{2g(m-1)}} \cdot m.$$

令 $k \to +\infty$，得 $g(m) = m$，则 $f(m) = m^{a}$.

综上得 $f = 0$ 或 $f(n) = n^{a}(\forall n)$，其中 $a(a \geqslant 0)$ 为常数.

24. 可用参数变易法转化为函数不等式证明，或根据被积函数的形式，通过分部积分讨论.

解法 1　设 $F(x) = \int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t - f(x)g(1)$，

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续，并且

$$F'(x) = g(x)f'(x) - f'(x)g(1) = f'(x)[g(x) - g(1)].$$

由于 $x \in [0, 1]$ 时，$f'(x) \geqslant 0$，$g'(x) \geqslant 0$，因此 $F'(x) \leqslant 0$，即 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减.

注意到　　$F(1) = \int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t - f(1)g(1)$，

而 $\int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}f(t) = g(t)f(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t$

$$= f(1)g(1) - \int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t,$$

故 $F(1) = 0$.

因此 $x \in [0, 1]$ 时，$F(x) \geqslant 0$，由此可得对任何 $a \in [0, 1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1).$$

解法 2　$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x = g(x)f(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(a)g(a) - \int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x$，

$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(a)g(a) - \int_0^a f(x)g'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(a)g(a) + \int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x$.

由于 $x \in [0, 1]$ 时，$g'(x) \geqslant 0$，因此 $f(x)g'(x) \geqslant f(a)g'(x)$，$x \in [a, 1]$，$\int_a^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^1 f(a)g'(x)\mathrm{d}x = f(a)[g(1) - g(a)]$.

从而 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(a) + f(a)[g(1) - g(a)] = f(a)g(1)$.



注　对于积分不等式的证明，主要有两个途径：一是转化函数不等式，二是通过恒等变换.

25. 设 $x'_i \in (a, b)$，根据凸函数可得

$$f(A'_n) \geqslant B'_n, \qquad ①$$

$$A'_n = \sum_{i=1}^{n} P_i x'_i / \lambda_n,\ B'_n = \sum_{i=1}^{n} P_i f(x'_i) / \lambda_n.$$

令 $x'_1 = x'_2 = \cdots = x'_{n-1} = A_{n-1}$，$x'_n = x_n$，

则 $f(A'_n) = f(A_n)$，$B'_n = [\lambda_{n-1} f(A_{n-1}) + P_n f(x_n)]/\lambda_n$.

因 $P_n f(x_n) = \lambda_n B_n - \lambda_{n-1} B_{n-1}$，

把它们代入式 ① 中可得 $\lambda_n[f(A_n) - B_n] \leqslant \lambda_{n-1}[f(A_{n-1}) - B_{n-1}]$，即 $\varphi(n) \geqslant \varphi(n-1)$.

由此可知 $\varphi(n)$ 是 n 的递增函数.

（Ⅰ）取 $f(x) = \ln x$，$x \in (0, +\infty)$，可得函数

$$F(n) = \frac{\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}}{x_1^{P_1} x_2^{P_2} \cdots x_n^{P_n}}$$

是 n 的递增函数.

（Ⅱ）根据（Ⅰ）可知 $F(n) \geqslant F(n-1) \cdots \geqslant F(1) = 1$，不难得到：

对于实数 $x_i > 0$，$P_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$，有 $\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i} \geqslant \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{P_i}$，等号当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立.

此即著名的加权平均值不等式.

（Ⅲ）对（Ⅱ）作变量置换，不难得到：

若 $x_i > 0$，$P_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$，则函数

$$G(n) = \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i} - \prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{P_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}}\right)$$

与

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} P_i \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{P_i}{x_i}}\right)$$

是 n 的递增函数.

（Ⅳ）（Ⅲ）中取 $P_i = 1 (1 \leqslant i \leqslant n)$ 可得，

若 $x_i > 0 (1 \leqslant i \leqslant n)$，则函数

$$G_1(n) = n\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}\right)$$



与
$$g_1(n)=n\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\right)$$
是 n 的递增函数.

26. (1) 据已知,先写出 n 与 $f(n)$ 的开始的一些值并猜想出:f 递增地取遍正整数值,且每个值 m 出现 $r+1$ 次,其中 r 为 m 含 2 的最高次数(记 $2^r \| m$).

为证这一结论,注意到如 m 的二进制表示为$\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2b_1}$($b_i=0$ 或 1),则在不超过 m 的正整数中,奇数个数为$\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2b_1}$.

2 的倍数(而非 4 的倍数)个数为
$$\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_2}-\overline{b_kb_{k-1}\cdots b_3}\cdots$$
最后,2^{k-1} 的倍数个数为 b_k,因此适合 $f(n)=m$ 的最大 n(记为 a_m)等于
$$\begin{aligned}
&1\cdot(\overline{b_k\cdots b_2}+b_1)+2\cdot(\overline{b_k\cdots b_2}-\overline{b_k\cdots b_3})+\cdots+(k-1)(\overline{b_kb_{k-1}}-b_k)+k\cdot b_k\\
&=b_1+3\,\overline{b_k\cdots b_2}+\overline{b_k\cdots b_3}+\cdots+\overline{b_kb_{k-1}}+b_k\\
&=\overline{b_k\cdots b_1}+\overline{b_k\cdots b_2}+\cdots+\overline{b_kb_{k-1}}+b_k\\
&=b_1+b_2(1+2)+\cdots+b_k(1+2+\cdots+2^{k-1})\\
&=\sum_{i=1}^{k}b_i(2^i-1).
\end{aligned}$$
我们有 $a_1=2^1-1=1$,$a_2=2^2-1=3$,$a_3=(2^2-1)+(2-1)=4$,$a_4=2^3-1=7$,$\cdots$.

如果 $2^r\|m$,则 $a_m-a_{m-1}=(2^{r+1}-1)-[(2^r-1)+(2^{r-1}-1)+\cdots+(2-1)]=r+1$.

下面对 m 用归纳法证明:当 $a_{m-1}<n\leqslant a_m$ 时,$f(n)=m$(规定 $a_0=0$).

$m\leqslant 10$ 时已直接验证,设 $n\leqslant a_m$ 时结论成立,则(1) 若 $m+1$ 为奇数,令 $m+1=1+2^{i_1}+2^{i_2}+\cdots+2^{i_k}$($1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k$),则 $a_m=(2^{i_1+1}-1)+(2^{i_2+1}-1)+\cdots+(2^{i_k+1}-1)$,$a_{m+1}=a_m+1$.

于是 $f(a_{m+1})=f(a_{m+1}-m)+f(a_m-m)=f(a_{\frac{m}{2}}+1)+f(a_{\frac{m}{2}})=\frac{m}{2}+1+\frac{m}{2}=m+1$.

(2) 若 $m+1$ 为偶数,令 $m+1=2^{i_1}+2^{i_2}+\cdots+2^{i_k}$,

$2^{i_1-1}\left\|\frac{m+1}{2}\right.$.
$$\begin{aligned}
a_m&=(2-1)+\cdots+(2^{i_1-1}-1)+(2^{i_2-1}-1)+\cdots+(2^{i_k+1}-1)\\
&=(2^{i_1-1}-1)+(2^{i_2-1}-1)+\cdots+(2^{i_k+1}-1)-(i_1+1).
\end{aligned}$$
$f(a_m+1)=f(a_{\frac{m+1}{2}}-i_1+1)+f(a_{\frac{m+1}{2}}-i_1+1)=\frac{m+1}{2}+\frac{m+1}{2}=m+1$,

$f(a_m+2)=f(a_{\frac{m+1}{2}}-i_1+1)+f(a_{\frac{m+1}{2}}-i_1+1)=m+1$,

$f(a_m+3)=f(a_{\frac{m+1}{2}}-(i_1-2))+f(a_{\frac{m+1}{2}}-i_1+1)=m+1$,

……

$f(a_m+i_1+1)=f(a_{\frac{m+1}{2}})+f(a_{\frac{m+1}{2}}-1)=m+1$.

即对 $a_m<n\leqslant a_{m+1}$ 均有 $f(n)=m+1$.

由此即得(1)的结论,且(2)的答案是:满足 $f(n)=2^{10}+1$ 的 n 只有一个,$n=2^{11}-1+2-1=2^{11}$.

另证(1)(Ⅰ)设对 $n=1,2,\cdots,m-1$,有



$$f(n+1)-f(n)=0\text{ 或 }1。\qquad ①$$

则对每个 $n\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 有

$$[(n+2)-f(n+1)]-[(n+1)-f(n)]=1-[f(n+1)-f(n)]\in\{0,1\}.$$

因此，由归纳假设，得

$$f[n+2-f(n+1)]-f[n+1-f(n)]\in\{0,1\}.\qquad ②$$

情况 1　$f(m)=f(m-1)+1$，这时

$$\begin{aligned}&f(m+1)-f(m)\\=&f[m+1-f(m)]-f[m-1-f(m-2)]\\=&f[m-f(m-1)]-f[m-1-f(m-2)]\in\{0,1\}.\end{aligned}$$

情况 2　$f(m)=f(m-1)$，根据已知

$$f[m-f(m-1)]=f[m-2-f(m-3)],$$

根据 ② 式，它们均等于 $f[m-1-f(m-2)]$，从而

$$\begin{aligned}&f(m+1)-f(m)\\=&f[m+1-f(m)]-f[m-1-f(m-2)]\\=&f[m+1-f(m)]-f[m-f(m-1)]\in\{0,1\}.\end{aligned}$$

无论哪种情况，② 式均对 $n=m$ 成立，从而 ② 式对所有正整数成立，即 ① 对所有正整数成立.

（ⅱ）设结论在 $n<m$ 时成立，若 $f(m)$ 为奇数，则 $f(m-1)$ 必为偶数，于是 $f(m)=f(m-1)+1$，

$f(m+1)=f[m+1-f(m)]+f[m-f(m-1)]=2f[m-f(m-1)]$，即 $f(m+1)$ 为偶数，因而 $f(m+1)=f(m)+1$.

(2) 由数学归纳法证明：对任意整数 $k>1$，$n=2^k$ 是方程 $f(n)=2^{k-1}+1$ 的唯一解，从而 $n=2^{11}$ 是 $f(n)=2^{10}+1$ 的唯一解. $k=2$ 时，结论显然成立. 设 $n=2^m$ 是 $f(n)=2^{m-1}+1$ 的唯一解，由于 $f(n)$ 的值每次取 0 或 1，并从已知递推式可看出，$f(n)\to\infty$，所以必有整数 u 使 $f(u)=2^m+1$，这时，$f(u-1)$ 必为偶数，并且 $f(u-1)=2^m$. 由于

$$f[u-f(u-1)]+f[u-1-f(u-2)]=f(u)=2^m+1,$$

并且左端两项之差为 0 或 1，所以

$$f[u-f(u-1)]=f[u-1-f(u-2)]+1=2^{m-1}+1,$$

由归纳假设　$u-f(u-1)=2^m$.

从而　$u=2^m+f(u-1)=2^{m+1}$.

